ریاضیات گسسته و کاربردها

علیرضا غفاری حدیقه ـ مگردیچ تومانیان

موسسه چاپ و انتشارات
دانشگاه جامع امام حسین (ع)

فهرست

مقدمه

سخن ناشر

بسم الله الرحمن الرحیم
«یرفع الله الذین امنوا منکم والذین اوتوالعلم درجات»
خداوند مقام اهل ایمان و دانشمندان عالم را (در هر دو جهان) رفیع می‌گرداند.
(سوره مبارکه المجادله_ آیه ۱۱)

تمام ادیان الهی و در راس آنها اسلام، انسان را موجودی کمال‌گرا می‌دانند. از نظر اسلام، انسان همواره در حال تکامل است و جهت‌گیری او به سمت کمال بی‌نهایت، یعنی خداوند تبارک و تعالی است.

یکی از راه‌های کمال و تقرب به ذات اقدس الهی، علم و دانش است. علمی که به تعبیر استاد شهید مرتضی مطهری؛ زیبایی عقل است؛ علمی که انسان خداجو در آن نشانه‌های معبود را می‌جوید و می‌یابد؛ علمی که هر چه فزون‌تر می‌شود، دارنده آن را به خدا نزدیک‌تر می‌کند. هم از این روست که نظام مقدس جمهوری اسلامی ایران که شالوده و اساس آن بر مبنای احکام اسلام است، توجه به علم، دانش و تحقیق و نشر در صدر مسایل قرار دارد.

دانشگاه جامع امام حسین (ع) نیز به عنوان مولود شجره طیبه سپاه پاسداران انقلاب اسلامی که خود برآمده از عمق ارزش‌های الهی و انقلابی است، به عنوان تنها دانشگاه جامع علمی_ نظامی کشور، پس از پایان افتخارآمیز حماسه هشت سال دفاع مقدس که خود عرصه کم‌نظیر برای نمایش لیاقت‌ها و توانمندی‌های علمی و پژوهشی نیروهای مخلص حزب اللهی بود، موضوع **جهاد علمی** و تلاش در جهت رشد و شکوفایی هرچه بیشتر در زمینه های مختلف علمی را در سرلوحه فعالیت‌های خویش قرار داده است. هر چند از ابتدای تاسیس، این دانشگاه سعی وافر در ترویج و نشر علوم مختلف داشته است و آثاری را عرضه نموده است که با استقبال اندیشمندان و پژوهشگران مواجه شده است.

امروزه در شاخه‌های گوناگون علوم سعی می‌شود تا مفاهیم اساسی را با زبان ریاضی بیان نمایند و قالب ریاضی آن را پیدا کنند تا بتوانند وجود آنها را منطقی و به صورت ساختاری منسجم و مستقل درآورند و به پیشرفت‌های سریع‌تری دست یابند.

یکی از شاخه‌های مهمی که به این امر کمک می‌کند، ریاضیات گسسته است که قدرت مدل‌سازی آن مورد توجه واقع شده و باعث تحول فکری گردیده است. الگوریتم‌های مختلفی که در ریاضیات گسسته مطرح هستند، پل ارتباطی انکارناپذیری بین علوم کاربردی و علوم رایانه ایجاد می‌کنند. در اغلب کشورهای پیشرفته علمی، درس ریاضیات گسسته و دروس وابسته به آن در برنامه‌های آموزشی دوره‌های مختلف قرار دارند.

در کشور ما نیز مدتی است که دانش‌آموزان با این درس آشنا می‌شوند و دانشجویان نیز به عناوین مختلف در این شاخه ریاضی تا اندازه‌ای مهارت کسب می‌کنند.

امید است کتاب حاضر مورد توجه و بهره‌برداری صاحب نظران و محققان، علی‌الخصوص دانشجویان رشته‌های ریاضی محض و کاربردی، علوم کامپیوتر و حتی مهندسی قرار گرفته و با اعلام نظرات و

پیشنهادات اصلاحی خود، ما را در ترویج و انتشار آثار مورد نیاز جامعه علمی کشور یاری فرمایند.

ومن الله التوفیق
معاونت پژوهش دانشگاه جامع امام حسین (ع)

مقدمه چاپ دوم

به نام آن که جان را فکرت آموخت

ریاضیات گسسته یکی از شاخه‌های معاصر در ریاضیات است که به طور گسترده در تجارت و صنعت استفاده می‌شود. اغلب آن را ریاضیات کامپیوتر و یا ریاضیات استفاده شده در بهینه‌سازی سیستم‌های متناهی می‌نامند. موضوعات مورد بحث در ریاضیات گسسته طیف وسیعی از مباحث ریاضی (و البته کاربردی) را در بر می‌گیرند. موضوعاتی مانند روش‌های شمارش، نظریه گراف، رابطه‌های بازگشتی، جبر خطی، نظریه اعداد، نظریه مجموعه‌ها، منطق و اصول استنتاج و سایر مواردی که در حالت کلی در آنها نشانی از مفهوم حد و پیوستگی وجود ندارد.

ریاضیات گسسته مانند حساب دیفرانسیل و انتگرال نیست و همه چیز در آن شمارا (و اغلب متناهی) است. مسایلی زیادی وجود دارند که در زندگی روزمره با آنها برخورد می‌کنیم و برای یافتن پاسخ آنها نیاز به داشتن دانش حساب دیفرانسیل و انتگرال نیست؛ هر چند ممکن است در سطح پیشرفته برای حل مسایل از آنها نیز استفاده شود.

زبان استفاده شده در برنامه نویسی رایانه و نرم‌افزارها، همه به نوعی با منطق سر و کار دارند. دستوراتی که نوشته می‌شوند نیازمند ارزیابی و بررسی درستی منطق برنامه هستند. ابزاری مناسب برای این کار در دو فصل اول (و به طور مجردتر و کاربردی‌تر در فصل ششم کتاب) فراهم آمده است. فصل اول در مورد منطق گزاره‌ها و روش‌های مختلف استنتاج منطقی است. آنچه در این کتاب مطرح می‌شود تنها منطق متداول صفر ـ یک را شامل شده و از وارد شدن به بحث «منطق فازی» خودداری می‌کنیم. فصل دوم در باره نظریه مجموعه‌ها و ارتباط آنها با توابع و رابطه‌ها است. در ظاهر امر، این مطالب موضوعاتی کاملاً مجرد به نظر می‌رسند، ولی کاربرد بسیار وسیعی در سایر علوم مخصوصاً علوم رایانه و فناوری اطلاعات دارند. با توجه به نقش مهمی که دو فصل اول در این رشته‌ها دارند، شکل نسبتا کاملی از این مطالب جمع‌آوری شده و همراه با تمرینات متنوع بیان شده‌اند. دانشجویان رشته ریاضی با مطالب مطرح شده در این دو فصل (و با دیدگاه ریاضی) در درسی مستقل (معمولاً با نام مبانی ریاضیات) آشنا می‌شوند. در حالی که دانشجویان رشته رایانه و فناوری اطلاعات تنها به صورت خیلی مختصر در دوره دبیرستان با آن برخورد می‌کنند. دانشجویان رشته ریاضی می‌توانند از مطالعه این فصول صرف نظر کرده و مستقیما با مطالب فصل سوم شروع کنند. گرچه روش‌های ارائه شده در این فصول نیز می‌توانند در افزایش توانایی این دانشجویان مفید باشند.

بسیاری از شاخه‌های علوم به پاسخ این سوال نیازمند هستند «چه تعداد؟». شاید سوالی مانند « آیا شماره تلفن‌های کافی برای تحویل خطوط تلفن، نمابر و تلفن همراه برای یک منطقه مشخص وجود دارد؟» نیز برای شما پیش آمده است. در نظریه احتمالات گسسته، لازم است بدانیم که تعداد حالت‌های مساعد یک پیشامد چند است. همچنین به تعداد تمامی اعضای فضای نمونه نیز نیاز داریم. ترکیبیات که به آن «ترکیبیات ریاضی» نیز می‌گویند حوزه‌ای از ریاضی است که با مساله انتخاب، ترتیب و عملیات در سیستم‌های متناهی و گسسته سر و کار دارد. هدف ترکیبیات «چگونه بدون شمردن بشماریم!» است. پاسخ چنین سوالاتی را می‌توان از فصل سوم کتاب انتظار داشت. این فصل به بررسی روش‌های شمارش اختصاص یافته است. با اصول اولیه شروع کرده و در نهایت اصول پیشرفته شمارش مطرح می‌شوند.

سوالات دیگری نیز ممکن است در ذهن شما باشد.

- موثرترین مسیر برای برف‌روبی خیابان‌ها بعد از باریدن برف سنگین در شهر کدام است؛ یا به طور مشابه، بهترین مدل جمع‌آوری مناسب زباله شهری چیست؟

- بهترین راه برای برنامه‌ریزی هشت جلسه، به طوری که با هم تلاقی نداشته باشد، چیست؟ در اینجا فرض بر این است که تعدادی از افراد به طور مشترک باید در چندین جلسه شرکت کنند .
- چگونه می‌توان تمامی فعالیت‌هایی را که در یک پروژه (مانند پروژه ساختمانی) باید انجام گیرند برنامه‌ریزی و زمان‌بندی کرد تا در حداقل زمان به پایان برسد؟

برخی مسایل از این نوع را می‌توان در شاخه‌ای از ریاضی به نام «نظریه گراف» مشاهده کرد. مطالبی که در ظاهر امر به شکل مجرد مطرح می‌شوند، در حالی که نیازهای زندگی مدرن انگیزه‌ای بسیار قوی برای توسعه این شاخه از علم ایجاد کرده است.

برای آشنایی بیشتر با مساله‌ای در نظریه گراف، مثال ساده‌ای را مطرح می‌کنیم. با نقشه ایران آغاز می‌کنیم و می‌پرسیم: «آیا مشهد به تبریز (با دنباله‌ای از چند استان مجاور) متصل است؟» و البته پاسخ مثبت است. این سوال با مفهوم همبندی در گراف ارتباط دارد. اگر پرسیده شود که کوتاه‌ترین مسیر (حداقل تعداد استان‌ها که از آنها عبور می‌کنیم) کدام است، با بررسی تمامی مسیرها (و البته نه واقعاً همه آنها) پاسخی برای مساله پیدا می‌کنید. حال اگر برخی از مسیرهای بین استان‌ها به هر دلیلی مسدود باشد (مثلا راه بین استان زنجان و استان قزوین)، یافتن پاسخ قدری مشکل خواهد بود. برای پاسخ به چنین سوالاتی می‌توانیم از نظریه گراف و در شکل تکمیلی آن از بهینه‌سازی ترکیبیاتی استفاده کنیم.

فصل چهارم این کتاب مقدمه‌ای بر نظریه گراف بوده، مفاهیم اولیه مطرح شده و کاربردهای ساده‌ای را بیان می‌کند. گراف‌های خاص مانند گراف های اولری و گراف‌های هامیلتونی و درخت‌ها و کاربردهای آنها در علوم مدرن، قسمت عمده این فصل را تشکیل می‌دهد. گراف‌های مسطح و مساله رنگ‌آمیزی مناسب گراف‌ها نیز در پایان فصل مطرح می‌شوند.

سوالات دیگری نیز در سایر شاخه‌های علوم مطرح می‌شوند که ریاضیات گسسته، برای آنها پاسخ‌های مناسب و قانع کننده‌ای دارد. به عنوان مثال دو سوال بعدی در رشته‌های علوم زیستی، جمعیت شناسی و اقتصاد مطرح هستند.

- دُز مناسب دارو برای یک بیماری و مقدار صحیح داروی خاص در بدن چقدر است تا متابولیسم لازم و سالم در بدن بیمار را انجام دهد؟
- چگونه می‌توان جمعیت در حال تغییر را مدل‌بندی کرده و تحلیل نمود؟ سوال مشابه در مورد پولی که باید سرمایه‌گذاری کرد، نیز مطرح است.

پاسخ چنین سوالاتی را از فصل پنجم کتاب، جایی که رابطه‌های بازگشتی مطرح شده‌اند، انتظار داریم. روش‌های مختلف مدل‌بندی مساله‌ها و ابزارهای ریاضی برای حل چنین معادلاتی در این فصل مطرح شده است. از جمله روش‌ها می‌توان به ابزار بسیار قدرتمند «تابع مولد» اشاره کرد.

آنچه در دو فصل اول کتاب می‌بینید و روابط موجود در آنها، حالت خاصی از یک قالب ریاضی به نام «جبر بول» هستند. فصل ششم مقدمه‌ای بر جبر بول و کاربردهای آن است. در ادامه، کاربردی از آن در مبحث طراحی مدارهای منطقی و همچنین بهینه‌سازی آنها به طور مختصر بیان می‌شود.

نظریه میدان‌های متناهی و کاربرد آنها در فناوری اطلاعات (کدگذاری و رمزنگاری) انگیزه‌ای بر آشنایی مختصر با مفاهیم اولیه در فصل هفتم است. ماتریس‌های هادامار و خصوصیات آنها، همچنین طرح‌های بلوکی به عنوان تعمیمی بر گراف‌ها نیز در این فصل مطرح می‌شوند. فصل پایانی کتاب مقدمه‌ای بر نظریه کدگذاری جبری و رمزنگاری است که به صورت پیشرفته‌تر پایه علم تبادل اطلاعات را ایجاد می‌کنند.

مباحث این کتاب برای تدریس در دوره‌های کارشناسی رشته‌های ریاضی، فناوری اطلاعات و علوم مهندسی طراحی شده‌اند. واضح است که این مطالب تنها جرعه‌ای از دریای بیکران علوم بوده و برای

آشنایی اولیه و ایجاد انگیزه در خواننده می‌باشد. مطالب پیشرفته‌تر را از کتاب‌های تخصصی‌تر که در کتابنامه آورده شده‌اند، انتظار داریم. به عنوان مثال، [۳۰] یک مرجع مناسب و کاربردی کامل در ریاضیات گسسته است که اخیراً منتشر شده است.. منابع دیگری که در سطح کمی بالاتر و از دیدگاه ریاضی موضوع را بررسی می‌کند نیز وجود دارند (به عنوان مثال [۱۳] را نگاه کنید). منابع دیگری نیز وجود دارند که مطالب تکمیلی در ریاضیات گسسته را مطرح می‌کنند (مانند [۲۵] و [۱۵]. دانشجویان رشته علوم نرم‌افزار و سخت افزار و فناوری اطلاعات نیز می‌توانند از منابعی مانند [۱۶] که بیشتر جنبه کاربردی ریاضیات گسسته در حوزه خاص را مطرح می‌کنند استفاده نمایند. گردایه کاملی از فرمول‌های مورد استفاده در ریاضیات گسسته را نیز می‌توان در [۳۱] مشاهده کرد.

ویرایش اول این کتاب در سال ۱۳۸۰ به همت انتشارات دانشگاه جامع امام حسین (ع) منتشر گردید. در طی ۱۰ سال گذشته، در طی تدریس در رشته‌های مختلف علوم، کاستی‌هایی در کتاب مشاهده شد. از جمله می‌توان به غلط‌های چاپی که وجود داشت اشاره کرد. ویرایش دوم این کتاب با تغییراتی ارائه می‌شود. مزیت‌های ویرایش جدید را در چند مورد بیان می‌کنیم. فصل اول و دوم کتاب برای پوشش کامل درس ریاضیات گسسته در رشته فناوری اطلاعات به کتاب افزوده شده‌اند. علاوه بر آن، کتاب در نرم‌افزار ریاضی‌نویسی زی‌پرشین[1] مجدداً تایپ شده است. این امر به یکنواختی فرمول‌ها و اَشکال و در نهایت، زیبایی متن افزوده است. برخی از تمرینات به کتاب اضافه شده و تعدادی نیز اصلاح شده‌اند. همچنین فصل جدیدی به عنوان «پاسخ تمرینات منتخب» نیز به کتاب افزوده شده است تا راهنمای مناسبی برای خوانندگان باشد. در پایان کتاب، علاوه بر تکمیل واژه‌نامه، نمایه موضوعی و نمایه نمادهای استفاده شده نیز به کتاب اضافه شده تا دسترسی خوانندگان به موضوعات، سریع‌تر انجام گیرد. با این وجود، اذعان میکنیم که این ویرایش نیز خالی از اشکال نبوده و مشتاقانه منتظر رهنمودهای خوانندگان هستیم.

در پایان از تمامی کسانی که با گوشزد کردن ایرادات موجود در ویرایش قبلی و رهنمودهای خود، ما را در تکمیل این ویرایش یاری کرده‌اند، مخصوصاً دانشجویان گمنامی که در حین مطالعه کتاب، آنها را یادداشت کرده و به مولفان منتقل کرده‌اند، صمیمانه قدردانی می‌کنیم. از انتشارات دانشگاه جامع امام حسین (ع) که همواره در توسعه علوم پیشگام بوده و مسولیت چاپ ویرایش دوم کتاب را نیز پذیرفته‌اند، تشکر می‌نماییم.

دکتر علیرضا غفاری حدیقه
استاد دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
hadigheha@azaruniv.ac.ir

دکتر مگردیچ تومانیان
استاد بازنشسته دانشگاه تبریز

تابستان ۱۳۹۰

---
[1] Xepersian

فصل ۱

منطق و برهان

موضوع اصلی منطق ریاضی، استدلال ریاضی است. در این فصل با ابزارهایی آشنا می‌شویم که ما را در استدلال ریاضی یاری کنند. نکته اساسی در منطق ریاضی ایجاد زبان رسمی برای استفاده همگان است. این زبان باید برای همه کاربران قابل درک بوده و مورد توافق باشد. منطق ریاضی ریشه در فلسفه دارد و بدیهی است که به تنهایی با استفاده از بحث‌های غیر ریاضی است که می‌توان قاعده‌های متداول استنتاج را ارزیابی کرد. همچنین با فلسفه است که می‌توان تمایزی بین استدلال مفهومی (آنچه درست است) و استدلال نحوی (آنچه می‌توان نشان داد) قایل شد.

دانشجویان معمولاً با منطق گزاره‌ای در دوره دبیرستان آشنا می‌شوند. این آشنایی روش‌هایی مانند جدول ارزش‌گذاریِ منطق نمادی با استفاده از رابطهای «و»، «یا» و «نقیض» و هم‌ارزی‌های گوناگون بین روش‌های برهان را شامل می‌شود. این فصل برای آشنایی اولیه با مفاهیم منطق ریاضی طراحی شده است. در این فصل ابتدا گزاره‌ها و رابطهای گزاره‌ای را تعریف کرده و روش ارزیابی درستی گزاره را توصیف می‌کنیم. در ادامه روش‌های استنتاج را مرور می‌کنیم. خوانندگان علاقمند به یک مرجع جامع و ساده می‌توانند از [۲۰] استفاده کنند. اشخاصی که به دیدگاه ریاضی مبحث منطق علاقمند هستند نیز می‌توانند به منابع تخصصی‌تر مانند [۱۱] مراجعه کنند.

۱.۱ گزاره و اعمال مربوط به آنها

گزاره یک جمله خبری است که یا درست است و یا نادرست (یعنی امکان ندارد که یک گزاره همزمان هم درست باشد و هم نادرست). به چند گزاره بعدی توجه کنید. ارزش هر گزاره در مقابل آن نوشته شده است: «پاریس در فرانسه است» (درست)؛ «لندن در دانمارک است» (نادرست)؛ «$۲ < ۴$» (درست)؛ «$۴ = ۷$» (نادرست).

جمله‌های «نام شما چیست؟» (یک جمله سوالی است)؛ «تکلیف‌هایت را انجام بده» (جمله دستوری)؛ «این گزاره نادرست است» (نه درست است و نه نادرست)؛ « x یک عدد زوج است» (درستی آن به مقدار x وابسته است)؛ «سقراط» (جمله نیست)؛ گزاره نیستند. درستی یا نادرستی یک گزاره را **ارزش درستی** آن می‌گویند.

نام	نماد	مفهوم
نقیض	$\neg p$	چنین نیست که p
عطف	$p \wedge q$	p و q
فصل	$p \vee q$	p یا q
یا مانع جمع	$p \oplus q$	یا p یا q ولی نه هر دو همزمان
الزام	$p \Rightarrow q$	اگر p آنگاه q
دوشرطی	$p \Leftrightarrow q$	p اگر و فقط اگر q

جدول ۱.۱: رابطهای گزاره‌ای و نمادهای آنها

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
د	د	ن	د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	د	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د	د	ن
ن	ن	د	ن	ن	ن	د	د

جدول ۲.۱: ارزش گزاره‌های مرکب با استفاده از رابطهای گزاره‌ای

رابطهای گزاره‌ای و جدول ارزش

رابطهای گزاره‌ای برای ایجاد گزاره‌های ترکیبی به‌کار می‌روند. رابطهای اصلی در جدول ۱.۱ آمده‌اند (از p و q برای نشان دادن گزاره‌ها استفاده شده‌است). ارزش یک گزاره مرکب تنها به ارزش مولفه‌های آن بستگی دارد. درستی ارزش یک گزاره را با «د» (True) و نادرستی آن را با «ن» (False) نشان می‌دهیم. ارزش گزاره‌های مرکب را در جدول ۱.۲ خلاصه می‌کنیم.

توجه کنید که $p \vee q$ ترکیب «یا غیرانحصاری» را نشان می‌دهد؛ یعنی $p \vee q$ وقتی درست است که p یا q یا هر دوی آنها درست باشند. از طرف دیگر، $\oplus$ نشان دهنده «یا مانع جمع» است؛ یعنی $p \oplus q$ زمانی درست است که تنها یکی از گزاره‌های p یا q درست باشد و نه هر دوی آنها.

گزاره همیشه‌ـ درست، تناقض و استلزام

یک گزاره را **همیشه‌درست** گویند هرگاه برای هر نوع ارزش‌دهی مولفه‌های آن، همواره درست باشد. به عنوان مثال، گزاره $p \vee \neg p$ همیشه‌درست است. یک گزاره را **تناقض** گویند هرگاه برای هر نوع ارزش‌دهی مولفه‌های آن، همواره نادرست باشد. به عنوان مثال گزاره $p \wedge \neg p$ یک تناقض است (جدول بعدی را نگاه کنید).

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$	$p \vee \neg p$
د	ن	ن	د
ن	د	ن	د

گزاره‌های شرطی

گزاره‌ای به شکل «اگر p آنگاه q» یا «p، q را ایجاب می‌کند» که به صورت $p \Rightarrow q$ نمایش داده می‌شود؛ **گزاره شرطی** نامیده می‌شود. به عنوان مثال «اگر رضا اهل تهران باشد آنگاه ایرانی است» یک گزاره شرطی است. در اینجا گزاره p را **فرض** یا **مقدم** و گزاره q را **حکم** یا **تالی** نامند.

توجه داشته باشید که گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ همواره درست است مگر وقتی که گزاره p درست و گزاره q نادرست باشد. بنابراین، گزاره «اگر $۴ > ۲$، آنگاه پاریس پایتخت فرانسه است» درست است (درست $\Rightarrow$ درست). همچنین گزاره «اگر لندن پایتخت دانمارک باشد آنگاه $۴ > ۲$» نیز درست است (درست $\Rightarrow$ نادرست). گزاره «اگر $۷ = ۴$، آنگاه لندن پایتخت دانمارک است» نیز درست است (نادرست $\Rightarrow$ نادرست)؛ در حالی که گزاره «اگر $۴ > ۲$ آنگاه لندن پایتخت دانمارک است» نادرست است (درست $\Rightarrow$ نادرست).

ممکن است عجیب به نظر رسد که وقتی p نادرست بوده ولی q درست است؛ $p \Rightarrow q$ را درست در نظر بگیریم. این موضوع زمانی واضح‌تر می‌شود که گزاره‌نماها را بررسی می‌کنیم. به عنوان مثال گزاره شرطی «اگر x مضربی از ۴ باشد آنگاه مضربی از ۲ نیز است» را در نظر بگیرید. این استلزام به وضوح درست است گرچه برای حالت خاص $x = ۳$ این گزاره به صورت «اگر ۳ مضربی از ۴ باشد آنگاه مضربی از ۲ نیز است» درمی‌آید.

گزاره $p \Leftrightarrow q$ (خوانده می‌شود p اگر و فقط اگر q یا، p اگر و تنها اگر q) **دوشرطی** نامیده می‌شود و فقط زمانی درست است که ارزش هر دو گزاره یکسان است؛ به عبارت دیگر یا هر دو درست یا هر دو نادرست هستند.

هم‌ارزی منطقی

با توجه به آنچه در جدول بعدی مشاهده می‌شود، متوجه می‌شویم که گزاره‌های مرکب $p \Rightarrow q$ و $\neg p \vee q$ ارزش‌های یکسانی دارند:

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \Rightarrow q$
د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د

هرگاه دو گزاره مرکب، صرف نظر از ارزش مولفه‌های آنها، ارزش‌های یکسانی داشته باشند، **هم‌ارز منطقی** نامیده می‌شوند. بنابراین گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $\neg p \vee q$ هم‌ارز منطقی هستند و می‌نویسیم $\neg p \vee q \equiv p \Rightarrow q$. دو گزاره A و B هم‌ارز منطقی هستند اگر و فقط اگر $A \equiv B$ یک گزاره همیشه درست باشد.

مثال ۱.۱ قانون‌های دمورگان[۱] برای منطق گزاره‌های زیر هم‌ارز منطقی هستند:

$$\begin{aligned} \neg(p \vee q) &\equiv \neg p \wedge \neg q \\ \neg(p \wedge q) &\equiv \neg p \vee \neg q \end{aligned}$$

برای کنترل این واقعیت از جدول ارزش آنها استفاده می‌کنیم:

[۱] Augustus De Morgan (1806–1871)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
د	د	ن	ن	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	ن	د	د	ن	ن	ن	د	د
ن	د	د	ن	د	ن	ن	ن	د	د
ن	ن	د	د	ن	د	د	ن	د	د

مثال ۲.۱ هم‌ارزی منطقی

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

برقرار است. برقراری این هم‌ارزی را می‌توان با جدول ارزش مولفه‌های آن بررسی کرد:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	د	د

بنابراین، گزاره دوشرطی با ترکیب عطفی یک گزاره شرطی و عکس آن معادل است. به عنوان مثال؛ «رضا متاهل است اگر و فقط اگر همسر داشته باشد» هم‌ارز است با این که بگوییم «اگر رضا متاهل باشد آنگاه همسر دارد» **و** «اگر رضا همسر داشته باشد آنگاه متاهل است.» $\diamondsuit$

عکس و عکسِ نقیض

همچنان که گفته شد، گزاره $q \Rightarrow p$ **عکس** گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ است. توجه داشته باشید که یک گزاره ممکن است درست باشد ولی عکس آن نادرست (مثال قبلی را نگاه کنید). به عنوان مثال «اگر رضا تهرانی باشد آنگاه ایرانی نیز است» یک گزاره درست است؛ در حالی که عکس آن «اگر رضا ایرانی باشد آنگاه تهرانی نیز است» ممکن است نادرست باشد.

عکسِ نقیض گزاره $p \Rightarrow q$ به صورت $\neg q \Rightarrow \neg p$ تعریف می‌شود و این دو گزاره هم‌ارز منطقی هستند. به عنوان مثال دو گزاره «اگر رضا تهرانی باشد آنگاه ایرانی نیز است» و «اگر رضا ایرانی نباشد آنگاه تهرانی نیز نیست» هم‌ارز هستند.

گزاره‌نما

گزاره‌نما گزاره‌ای شامل یک یا چند **متغیر** است. به عنوان مثال، «$x + ۲ = ۷$»، «X ایرانی است»، «$x \leq y$» و «p یک عدد اول است» گزاره‌نما هستند. ارزش یک گزاره‌نما به مقداری که به متغیر نسبت می‌دهیم، وابسته است. به عنوان مثال اگر $x = ۱$ باشد آنگاه گزاره‌نمای «$x + ۲ = ۷$» به صورت «$۱ + ۲ = ۷$» درمی‌آید که نادرست است؛ ولی اگر $x = ۵$ باشد آنگاه گزاره‌نمای «$۵ + ۲ = ۷$» به دست می‌آید که درست است. گزارنما با یک حرف بزرگ که متغیرها در ادامه آن، داخل پرانتز نوشته شده‌اند، نشان داده می‌شود؛ مانند $P(x)$، $Q(x,y)$ و غیره.

مصداق برای $P(x)$ مقداری برای x است که $P(x)$ را به گزاره درست تبدیل می‌کند و **مثال نقض** مقداری برای x است که $P(x)$ را به گزاره نادرست تبدیل می‌کند. پس ۵ مصداقی برای $x + ۲ = ۷$ است و ۱ مثالی نقض برای آن. فرض می‌کنیم هر متغیر در یک گزاره‌نما به یک مجموعه تعلق دارد که آن مجموعه را **دامنه** متغیر می‌گویند. در گزاره‌نمای «n یک عدد صحیح فرد است»، n یک عدد صحیح

را نشان می‌دهد و بنابراین، دامنه n مجموعه اعداد صحیح است. در گزاره‌نمای «X ایرانی است.»، ممکن است X را انسان فرض کنیم و در این صورت دامنه X مجموعه انسان‌ها است[۲].

سورها

با داشتن گزاره‌نمای $P(x)$، عبارت «برای برخی x، $P(x)$» (یا «xی وجود دارد به طوری که $P(x)$») که با $\exists x; P(x)$ نشان داده می‌شود؛ ارزش مشخصی دارد و بنابراین، یک گزاره به مفهوم متداول است. به عنوان نمونه؛ اگر $P(x)$ گزاره‌نمای «$x + ۲ = ۷$» باشد که در آن دامنه x مجموعه اعداد طبیعی است آنگاه $\exists x; P(x)$ درست است. در حالی که اگر $Q(x)$ گزاره‌نمای «$۲x = ۷$» با دامنه مجموعه اعداد صحیح باشد، آنگاه «$\exists x; Q(x)$» نادرست است. از طرف دیگر، اگر دامنه x را اعداد گویا در نظر بگیریم این گزاره درست است. نماد $\exists$ را **سور وجودی** می‌نامند.

به طور مشابه، جمله‌های «برای هر x؛ $P(x)$»، «به ازای هر x؛ $P(x)$»، «برای تمامی xها، $P(x)$» و جمله‌هایی از این نوع که با نماد «$\forall x; P(x)$» نشان داده می‌شوند، ارزش مشخصی دارد. به عنوان نمونه، اگر $P(x)$ گزاره‌نمای «$x + ۲ = ۷$» بوده و دامنه آن مجموعه اعداد صحیح باشد، آنگاه «$\forall x; P(x)$» نادرست است. در حالی که اگر $Q(x)$ برای نشان دادن گزاره‌نمای «$(x + ۱)^۲ = x^۲ + ۲x + ۱$» استفاده شود، آنگاه «$\forall x; Q(x)$» درست است. نماد $\forall$ را **سور عمومی** می‌نامند.

در گزاره‌نماهایی با بیش از یک متغیر، می‌توان چندین سور را به طور همزمان به کار برد. به عنوان نمونه $\forall x \forall y \exists z; P(x, y, z)$ به این معنی است که «برای هر x و برای هر y، zی وجود دارد که در خاصیت $P(x, y, z)$ صدق می‌کنند».

توجه کنید که در حالت کلی نمی‌توان جای سور عمومی و سور وجودی را با هم عوض کرد، یعنی مفهوم $\forall x \exists y; P(x, y)$ با مفهوم $\exists y \forall x; P(x, y)$ متفاوت است. به عنوان نمونه اگر x, y برای نشان دادن انسان‌ها استفاده شوند و $P(x, y)$ نشان دهنده گزاره‌نمای «x دوست y است» باشد؛ آنگاه $\forall x \exists y; P(x, y)$ به این معنی است که همه انسان‌ها دوست شخص معینی هستند، در حالی که $\exists y \forall x; P(x, y)$ به این مفهوم است که شخصی وجود دارد که همه دوست او هستند. واضح است که این دو مفهوم یکسان نیستند.

در یک گرازه‌نما ممکن است تنها قسمتی از متغیرها سور داشته باشند؛ مثلاً

$$\forall x \exists y; P(x, y, z, t).$$

چنین متغیرهایی (در این مثال x و y) را متغیرهای **مقید** و بقیه (در این مثال z و t) را متغیرهای **آزاد** گویند. گزاره‌نمایی که با یک یا چند سور به گزاره تبدیل می‌شوند **گزاره سوری** گویند. گزاره‌نماهایی که تنها قسمتی از متغیرهای آن سور داشته باشند، هنوز گزاره‌نما هستند ولی به تعداد کمتری متغیر وابسته‌اند.

قانون‌های تعمیم یافته دمورگان در منطق

اگر $\exists x; P(x)$ نادرست باشد، آنگاه مقداری برای x وجود ندارد که $P(x)$ درست باشد، یا به عبارت دیگر $P(x)$ همیشه نادرست است. بنابراین،

$$\neg \exists x; P(x) \equiv \forall x; \neg P(x).$$

[۲] معمولاً تمامی متغیرهایی که در یک گزاره‌نما ظاهر شده‌اند از یک دامنه انتخاب می‌شوند. در برخی موارد این حالت برقرار نیست. به عنوان مثال در گزاره‌نمای «σ یک رشته به طول n است.»، متغیر σ یک رشته را نشان می‌دهد در حالی که n عدد طبیعی است. بنابراین، دامنه σ، مجموعه رشته‌ها و دامنه n، مجموعه اعداد طبیعی است.

از طرف دیگر، اگر $\forall x; P(x)$ نادرست باشد آنگاه برای هر x، $P(x)$ برقرار نیست و بنابراین، باید برای برخی x، $P(x)$ نادرست باشد. پس:

$$\neg\forall x; P(x) \equiv \exists x; \neg P(x).$$

این دو قاعده را می‌توان به طور متوالی برای پیدا کردن نقیض گزاره‌های سوری پیچیده استفاده کرد. به عنوان نمونه:

$$\neg\exists x\forall y : P(x,y) \equiv \forall x\neg\forall y; P(x,y) \equiv \forall x\exists y; \neg P(x,y).$$

۲.۱ دستگاه‌های ریاضی و برهان

یک **دستگاه ریاضی** از موارد زیر تشکیل می‌شود. **اصول موضوعه** آن گزاره‌هایی هستند که درست فرض می‌شوند. **تعریف**ها برای ایجاد مفاهیم جدید از روی مفاهیم قبلی به کار می‌روند. **جمله‌های تعریف نشده** متناظر با مفاهیم اولیه یک دستگاه هستند. به عنوان نمونه در نظریه مجموعه‌ها، مفهوم «مجموعه» **تعریف نشده** است. **قضیه** گزاره‌ای است که می‌توان درستی آن را ثابت کرد. روندی که برای بررسی درستی یک گزاره استفاده می‌شود **برهان** نام دارد. برای برهان معمولاً شش روش مختلف وجود دارد؛ **برهان به انتفای مقدم**، **برهان بدیهی**، **برهان مستقیم**، **برهان غیرمستقیم**، **برهان با حالت‌ها** و **برهان وجودی**.

برهان بدیهی

فرض کنید q در گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ درست است. در این صورت، صرف نظر از ارزش p، ارزش ترکیب شرطی درست است. بنابراین، اگر درستی حکم در یک قضیه (بدون توجه به درستی یا نادرستی فرض) ثابت شود آنگاه درستی قضیه نیز ثابت می‌شود. برای نمونه، گزاره شرطی «اگر x یک عدد حقیقی مثبت و n یک عدد صحیح نامنفی باشد؛ آنگاه $(۱ + x)^n \geq ۱ + nx$» در نظر بگیرید. برای بررسی درستی این گزاره از استقرا استفاده خواهیم کرد (بخش بعدی را نگاه کنید). ابتدا لازم است درستی این گزاره‌نما برای $n = ۱$ ثابت شود. به وضوح می‌بینیم که اگر $n = ۱$ باشد؛ صرف نظر از مقدار x، رابطه تساوی برقرار است. پس این گزاره‌نما برای $n = ۱$ یک قضیه است.

برهان به انتفای مقدم

فرض کنید p در گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ نادرست است. در این صورت، صرف نظر از ارزش q، ارزش ترکیب شرطی درست است. بنابراین، اگر نادرستی فرض در یک قضیه ثابت شود آنگاه درستی قضیه نیز ثابت می‌شود. برای نمونه، گزاره «اگر $۲ = ۱$ آنگاه $۴ = ۳$.» یک قضیه است. گرچه از این روش برای برهان کمتر استفاده می‌شود ولی در برخی از موارد خیلی کارا است.

برهان مستقیم

در این روش، فرض‌های مساله را درست در نظر می‌گیریم و در نهایت درستی حکم را نتیجه می‌گیریم. برای این کار از تمامی ابزارهای منطقی که در اختیار داریم، استفاده می‌کنیم.

مثال ۳.۱ با برهان مستقیم نشان دهید حاصل‌ضرب دو عدد فرد، فرد است.

حل : فرض کنید x و y دو عدد فرد هستند. پس اعداد صحیح m و n موجودند به طوری که $x = ۲n + ۱$ و $y = ۲m + ۱$. بنابراین

$$x \times y = (۲n + ۱) \times (۲m + ۱) = ۴mn + ۲m + ۲n + ۱ = ۲k + ۱,$$

که در آن $k = ۲mn + m + n$ یک عدد صحیح است. پس $x \times y$ یک عدد فرد است. $\diamondsuit$

برهان غیرمستقیم

در این روش از برهان، با توجه به معادل بودن دو گزاره $p \Rightarrow q$ و $\neg q \Rightarrow \neg p$، به جای بررسی درستی گزاره شرطی، درستی عکس نقیض آن را نشان می‌دهیم.

مثال ۴.۱ ثابت کنید اگر $x + y > ۵$ آنگاه $x > ۲$ یا $y > ۳$.

حل : باید درستی گزاره $(x + y > ۵) \Rightarrow (x > ۲ \vee y > ۳)$ را ثابت کنیم. روش غیرمستقیم برهان این است که درستی $\neg((x > ۲) \vee (y > ۳)) \Rightarrow \neg(x + y > ۵)$ را نشان دهیم. از طرف دیگر، گزاره $\neg((x > ۲) \vee (y > ۳))$ با گزاره $(x \leq ۲) \wedge (y \leq ۳)$ هم‌ارز است. افزودن این دو نابرابری بر هم، به نابرابری $x + y \leq ۵$ منجر می‌شود که همان $\neg(x + y > ۵)$ است. $\diamondsuit$

برهان با تناقض

در **برهان با تناقض** یا **برهان خلف**، فرض‌های مساله و نقیض حکم را در نظر گرفته و سعی می‌کنیم به تناقض برسیم؛ یعنی به گزاره‌ای مانند $r \wedge \neg r$ برسیم که همواره نادرست است.

مثال ۵.۱ با برهان خلف نشان دهید اگر $x + y > ۵$ آنگاه $x > ۲$ یا $y > ۳$.

حل : فرض کنیم $x + y > ۵$. از این گزاره باید برقراری یکی از نابرابری‌های $x > ۲$ یا $y > ۳$ را نتیجه بگیریم. فرض کنیم (فرض خلف) ($x > ۲$ یا $y > ۳$) نادرست است؛ پس «$x \leq ۲$ و $y \leq ۳$». با افزودن این دو نابرابری داریم $x + y \leq ۳ + ۲ = ۵$ که با فرض $x + y > ۵$ متناقض است. پس، فرض «$x \leq ۲$ و $y \leq ۳$» نادرست است و بنابراین، «$x > ۲$ یا $y > ۳$» باید درست باشد. $\diamondsuit$

گاهی تمایز بین برهان غیرمستقیم و برهان خلف مشکل است. در برهان غیرمستقیم، می‌خواهیم برقراری استلزام $p \Rightarrow q$ را با نشان دادن درستی عکس نقیض آن؛ یعنی $\neg q \Rightarrow \neg p$ ثابت کنیم. در حالی که در برهان خلف، گزاره‌ای مانند s را ثابت می‌کنیم (ممکن است s حکم مساله یک استلزام نباشد) و برای این کار درستی $\neg s$ را فرض کرده و تناقضی را نتیجه می‌گیریم. در واقع برهان خلف کلی‌تر از برهان غیرمستقیم است.

مثال ۶.۱ با برهان خلف نشان دهید $\sqrt{۲}$ عدد گویا نیست؛ یعنی اعداد صحیحی مانند a و b وجود ندارند که $\sqrt{۲} = a/b$.

حل : فرض کنیم $\sqrt{۲}$ گویا است؛ یعنی $\sqrt{۲} = a/b$ که در آن a و b کوچک‌ترین اعداد صحیح هستند که در این کسر صدق می‌کنند. با به توان دو رساندن این تساوی، داریم: $۲ = a^۲/b^۲$ و بنابراین، $a^۲ = ۲b^۲$. چون سمت چپ این رابطه مضربی از ۲ است، پس $a^۲$ زوج است و بنابراین، a نیز زوج

است. می‌نویسیم $a = ۲a'$. پس $۴a'^۲ = ۲b^۲$، یا $۲a'^۲ = b^۲$. یعنی $b^۲$ نیز زوج است و می‌توان نوشت $b = ۲b'$. در نتیجه

$$\frac{a}{b} = \frac{۲a'}{۲b'} = \frac{a'}{b'}$$

که با فرض کوچک‌ترین بودن a و b متناقض است. پس $\sqrt{۲}$ گویا نیست. $\diamondsuit$

برهان با حالت‌ها

در این روش از برهان، تمامی حالت‌هایی را که برای مساله متصور است، در نظر می‌گیریم و در هر حالت، درستی گزاره را ثابت می‌کنیم.

مثال ۷.۱ سه نفر در مورد راستگو و دروغگو بودن یکدیگر صحبت می‌کنند. نفر اول می‌گوید که نفر دوم دروغگو است. نفر دوم می‌گوید که دو نفر اول و سوم، یا هر دو دروغگو هستند و یا هر دو راستگو. این مفهوم را «هم‌سنخ بودن» می‌نامیم. ثابت کنید نفر سوم دروغگو است.

برهان: برهان را با در نظر گرفتن دو حالت مختلف برای راستگو و یا دروغگو بودن نفر اول انجام می‌دهیم:

حالت اول: فرض کنیم نفر اول راستگو است. در این صورت نفر دوم دروغگو است. پس ادعای او نیز نارست است. یعنی نفر اول و نفر سوم هم‌سنخ نیستند. چون نفر اول راستگو است؛ پس نفر سوم دروغگو است.

حالت دوم: فرض کنیم نفر اول دروغگو است. پس ادعای او نیز نادرست است و بنابراین، نفر دوم راستگو است. بنا بر ادعای نفر دوم، نفر اول و سوم هم‌سنخ هستند. چون نفر اول دروغگو است؛ پس نفر سوم نیز دروغگو است.

به این ترتیب در هر حالت، نفر سوم دروغگو است.

برهان وجودی

همچنان که در سور وجودی گفته شد، برای نشان دادن درستی یک قضیه که با سور وجودی بیان شده است، کافی است مصداقی پیدا کنیم. این نوع برهان را برهان وجودی گویند. دو نوع برهان وجودی وجود دارد؛ **برهان سازنده** و **برهان غیرسازنده**. اگر بتوانیم مقداری را پیدا کنیم که در خاصیت قضیه صدق کند، عملا با پیدا کردن مصداق، درستی قضیه را نشان دادیم. به عنوان نمونه مثال بعدی را نگاه کنید:

مثال ۸.۱ نشان دهید عدد صحیحی وجود دارد که آن را می‌توان به دو روش متفاوت به صورت مجموع مکعب‌ها نوشت. با انتخاب عدد ۱۷۲۹، قضیه ثابت می‌شود؛ زیرا $۱۷۲۹ = ۱^۳ + ۱۲^۳$ و $۱۷۲۹ = ۹^۳ + ۱۰^۳$. $\diamondsuit$

در برهان وجودی غیرسازنده، عملا مصداقی تولید نمی‌شود بلکه با روش غیرمستقیم نشان داده می‌شود که چنین چیزی باید وجود داشته باشد (معمولا با برهان خلف). به عنوان نمونه مثال بعدی را نگاه کنید.

مثال ۹.۱ نشان دهید عدد اول بزرگ‌تر از ۳ وجود دارد.

حل : فرض کنید عدد اول بزرگ‌تر از ۳ وجود ندارد. یعنی ۲ و ۳ تنها اعداد اول هستند. چون هر عدد را می‌توان به عامل‌های اول تجزیه کرد، پس عدد ۲۵ را باید بتوان به صورت حاصل ضرب توان‌هایی از ۳ و ۲ نوشت. بنابراین، باید اعداد صحیح نامنفی مانند i و j موجود باشند به طوری که $۲۵ = ۲^i \times ۳^j$. در حالی که می‌دانیم عدد ۲۵ بر ۲ و ۳ قابل قسمت نیست. بنابراین، حتما عدد اول بزرگ‌تر از ۳ وجود دارد. $\diamondsuit$

بحث‌ها، قواعد استنتاج

بحث دنباله‌ای از گزاره‌های $p_۱, p_۲, \ldots, p_n$ است که آنها را **فرض** می‌نامیم و به دنبال آن‌ها گزاره q می‌آید که آن را **حکم** گوییم. یک بحث معمولاً به صورت

$$\begin{array}{ll} & p_۱ \\ & p_۲ \\ & \vdots \\ & p_n \\ \hline \therefore & q, \end{array}$$

یا $p_۱, p_۲, \ldots, p_n / \therefore q$ نوشته می‌شود. بحث را **معتبر** گویند اگر درست بودن q از درست بودن $p_۱, p_۲, \ldots, p_n$ نتیجه شود؛ در غیر این صورت بحث **نامعتبر** است.

قواعد استنتاج بحث‌های ساده خاصی هستند که معتبر بودن آنها معلوم است و برای به وجود آوردن یک برهان گام به گام به کار می‌روند. به عنوان نمونه بحث زیر را ملاحظه کنید.

$$\begin{array}{ll} & p \Rightarrow q \\ & p \\ \hline \therefore & q, \end{array}$$

برای بررسی اعتبار این بحث از جدول درستی زیر استفاده می‌کنیم:

p	q	$p \Rightarrow q$	p	q
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	د
ن	ن	د	ن	ن

با ملاحظه جدول در سطرهایی که هم $p \Rightarrow q$ و p درست هستند (دقیقاً سطر اول)، q نیز درست است. پس این بحث معتبر است. قواعد متداولی که در استنتاج استفاده می‌شوند، به شرح ذیل هستند.

۱. **قاعده اول**

$$\begin{array}{ll} & p \Rightarrow q \\ & \neg q \\ \hline \therefore & \neg p, \end{array}$$

۲. **قاعده دوم**

$$\begin{array}{ll} & p \Rightarrow q \\ & p \\ \hline \therefore & q, \end{array}$$

۳. **قاعده سوم (قاعده جمع)**

$$\begin{array}{ll} & p \\ \hline \therefore & p \vee q, \end{array}$$

۴. **قاعده چهارم (قاعده ساده‌سازی)**

$$\begin{array}{ll} & p \wedge q \\ \hline \therefore & p, \end{array}$$

۵. **قاعده پنجم (قاعده عطف)**

$$\begin{array}{ll} & p \\ & q \\ \hline \therefore & p \wedge q, \end{array}$$

۶. **قاعده ششم (قاعده تراگذری)**

$$\begin{array}{ll} & p \Rightarrow q \\ & q \Rightarrow r \\ \hline \therefore & p \Rightarrow r, \end{array}$$

۷. **قاعده هفتم**

$$\begin{array}{ll} & p \vee q \\ & \neg p \\ \hline \therefore & q, \end{array}$$

۸. **قاعده هشتم (قاعده جذب)**

$$\begin{array}{ll} & p \vee q \\ & \neg p \vee r \\ \hline \therefore & q \vee r, \end{array}$$

بحث‌ها معمولاً در سه ستون نوشته می‌شوند. هر سطر یک برچسب دارد، گزاره‌ای را شامل می‌شود و دلیلی که وجود این گزاره در بحث را توجیه می‌کند. دلیل توجیهی استفاده شده در یک بحث یا «فرض بودن» آن گزاره است و یا آن را می‌توان با استفاده از قواعد استنتاج از روی گزاره‌های قبلی در بحث «نتیجه گرفت».

مثال ۱۰.۱ گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید: «با اتوبوس می‌آیم یا با پای پیاده. اگر با پای پیاده بیایم خسته می‌شوم. خسته نشده ام. پس با اتوبوس آمده‌ام.» این مساله را می‌توان به این صورت قالب‌بندی کرد. فرض کنید B برای نمایش گزاره «با اتوبوس می‌آیم» استفاده شود، گزاره «با پای پیاده می‌آیم» را با W نشان دهیم و گزاره «خسته می‌شوم» با T نمایش داده شود. فرض‌های مساله عبارتند از $B \vee W$، $W \Rightarrow T$ و $\neg T$؛ و B حکم بحث است. این بحث را می‌توان در گام‌های زیر نوشت:

گام	گزاره	دلیل
۱)	$W \Rightarrow T$	فرض
۲)	$\neg T$	فرض
۳)	$\neg W$	۱و۲و قاعده اول
۴)	$B \vee W$	فرض
۵)	$\therefore B$	۳و۴و قاعده هفتم

قاعده‌های استنتاج برای گزاره‌نماها

در اینجا قواعد استنتاج برای گزاره‌نماها با یک متغیر را بیان می‌کنیم. این قواعد را می‌توان برای گزاره‌نماهایی با بیش از یک متغیر تعمیم داد.

۱. **استلزام عام**. اگر گزاره $\forall x; P(x)$ درست باشد، آنگاه برای هر عضو خاص a از مجموعه مرجع، $P(a)$ نیز درست است. یعنی

$$\begin{array}{ll} & \forall x; P(x) \\ \hline \therefore & P(a), \end{array}$$

به عنوان نمونه، از درستی گزاره سوری $\forall x; (x + ۱ = ۱ + x)$، برقراری $۷ + ۱ = ۱ + ۷$ نتیجه می‌شود (در اینجا $a = ۷$).

۲. **استلزام وجودی** اگر $\exists x; P(x)$ درست باشد، آنگاه گزاره $P(a)$ برای برخی a مشخص از مجموعه مرجع درست است. یعنی

$$\begin{array}{ll} & \exists x; P(x) \\ \hline \therefore & P(a), \end{array}$$

تفاوتی که این قاعده با قاعده قبلی دارد در محدودیتی است که در مفهوم a نهفته است. در استلزام عام، a هر عضوی از مجموعه مرجع است در حالی که در استلزام وجودی، a تنها برخی از اعضای مجموعه مرجع است. به عنوان نمونه، از $\exists x; (x^۲ = ۲)$ (مجموعه مرجع اعداد حقیقی است) وجود برخی اعداد حقیقی نتیجه می‌شود، این اعداد را با $\pm\sqrt{۲}$ نشان می‌دهیم و داریم: $(\pm\sqrt{2})^2 = 2$.

۳. **تعمیم کلی**. اگر ثابت شود که گزاره‌نمای $P(x)$ برای یک عضو دلخواه a از مجموعه مرجع درست است، آنگاه $\forall x; P(x)$ نیز درست است. یعنی

$$\begin{array}{ll} & P(x) \\ \hline \therefore & \forall x; P(x), \end{array}$$

منظور از «یک عضو دلخواه» در اینجا این است که فقط فرض عضو مجموعه مرجع بودن را برای آن شیء در نظر می‌گیریم و محدودیت دیگری برای آن قایل نمی‌شویم. به عنوان نمونه، با فرض این که x یک عدد حقیقی دلخواه است و با استفاده از قواعد اولیه جبر، درستی $\forall x; [(x + ۱)^۲ = x^۲ + ۲x + ۱]$ ثابت می‌شود.

۴. **تعمیم وجودی** اگر $P(a)$ برای اعضای خاصی مانند a از مجموعه مرجع درست باشد، آنگاه $\exists x : P(x)$ نیز درست است. یعنی

$$\begin{array}{ll} & P(a) \\ \hline \therefore & \exists x; P(x), \end{array}$$

به عنوان نمونه، چون $۸ = ۱ + ۷$، پس $\exists x; (x + ۱ = ۸)$ نیز درست است.

مثال ۱۱.۱ نشان دهید می‌توان نادرستی یک گزاره کلی را با مثال نقض نشان داد. یعنی «اگر a عضوی از مجموعه مرجع باشد، آنگاه از $\neg P(a)$ می‌توان $\neg\forall x; P(x)$ را نتیجه گرفت.»

حل: این بحث را به صورت زیر می‌توان نوشت:

گام	گزاره	دلیل
۱)	$\neg P(a)$	فرض
۲)	$\exists x : \neg P(x)$	تعمیم وجودی
۳)	$\neg \forall x : P(x)$	نقیض گزاره کلی

تمرین ۱.۱

۱. هم‌ارزی منطقی گزاره‌های زیر را بررسی کنید:

$$\begin{aligned} \neg(p \Rightarrow q) &\equiv p \wedge \neg q \\ p \wedge q &\equiv \neg q \Rightarrow \neg p \\ \neg(p \Leftrightarrow q) &\equiv p \oplus q. \end{aligned}$$

۲. جملهٔ «برای هر عدد حقیقی، عدد حقیقی دیگری بزرگ‌تر از آن وجود دارد» را به شکل ریاضی نوشته و نقیض آن را نیز بنویسید.

۳. نشان دهید عبارت $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$ یک گزاره همیشه درست است.

۴. چه موقعی ارزش گزاره زیر درستی است؟

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow r).$$

۵. نشان دهید دو عبارت $(p \wedge q) \Rightarrow r$ و $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ معادل هستند.

۶. آیا هم‌ارزی‌های زیر برقرار هستند؟ چرا؟

$$(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r).$$

$$p \Rightarrow (q \vee r) \equiv (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r).$$

۷. سه نفر افشین، بابک و پرویز در مورد یک جرم متهم هستند. در بازجویی از این افراد اطلاعات زیر به دست آمده‌است:

- افشین: بابک مقصر است و پرویز بی‌گناه.
- بابک: اگر افشین مقصر باشد آنگاه پرویز نیز مقصر است.
- پرویز: من بی‌تقصیر هستم ولی حداقل یکی از دو نفر دیگر نیز مقصر است.

با فرض آن که p، q و r به ترتیب گزاره‌های «افشین بی‌گناه است»، « بابک بی‌گناه است» و « پرویز بی‌گناه است» باشند:

(آ) این بازجویی را به شکل استنتاج ریاضی بنویسید. جدول ارزش‌گذاری آن را نیز بنویسید.

(ب) با استفاده از جدول قبلی به سوالات زیر پاسخ دهید:

i. آیا این بازجویی‌ها سازگار هستند؟

ii. پاسخ یکی از متهمان را می‌توان از بازجویی دیگری نتیجه گرفت. آنها را مشخص کنید.

iii. با فرض این که هر سه نفر بی‌گناه هستند چه کسی شهادت دروغ داده است.

iv. با فرض آن که هر سه نفر راستگو هستند، بی‌گناه و مقصر را مشخص کنید.

v. با فرض آن که فرد بی‌گناه راست گفته است و فرد گناه‌کار دروغ می‌گوید، چه کسی مقصر است و چه کسی بی‌گناه؟

۸. بحث زیر را به صورت استنتاج ریاضی بنویسید:

اگر برف ببارد، رانندگی مشکل می‌شود. اگر رانندگی مشکل باشد، دیر به محل کار می‌رسم مگر آن که زودتر از منزل خارج شوم. برف می‌بارد، برای اجتناب از دیر رسیدن به محل کار باید زودتر از منزل خارج شوم.

۹. بحث زیر را به صورت یک عبارت منطقی نوشته و ارزش آن را تعیین کنید:

کسی که بتواند تمامی مساله‌های منطق را حل کند دانشجوی خوبی است. هیچ دانشجویی نمی‌تواند تمامی مساله‌های منطق را حل کند. بنابراین، مساله‌ای در منطق وجود دارد که هیچ‌کس نمی‌تواند آن را حل کند.

۱۰. نشان دهید گزاره سوری $\exists x(P(x) \Leftrightarrow \forall y P(y))$ همواره درست است.

۱۱. بحث زیر را به صورت استنتاج ریاضی بنویسید:

حمله دشمن فقط زمانی موفقیت آمیز است که غافلگیرانه باشد یا از موقعیت، بخوبی دفاع نشود. دشمن حمله غافلگیرانه انجام نمی‌دهد مگر آن که به پیروزی خود مطمئن باشد. اگر از موقعیت خوب دفاع شود آنگاه دشمن از پیروزی خود اطمینان نخواهد داشت. پس حمله دشمن موفقیت آمیز نخواهد بود.

آیا این استنتاج معتبر است (چرا؟).

۱۲. گزاره‌نماهای زیر را در نظر بگیرید:

- $H(x)$؛ x یک انسان است.
- $C(x)$؛ x یک اتومبیل است.
- $T(x)$؛ x یک کامیون است.
- $D(x,y)$؛ x، y را می‌راند.
- $I(x,y)$؛ x و y یکسان هستند.

گزاره‌های زیر را با استفاده از سورها بنویسید:

(آ) هیچ انسانی اتومبیل نیست.

(ب) هیچ اتومبیلی کامیون نیست.

(ج) انسانی وجود دارد.

(د) اتومبیلی وجود دارد.

(ه) فقط انسان‌ها رانندگی می‌کنند.
(و) تنها اتومبیل‌ها و کامیون‌ها رانده می‌شوند.
(ز) برخی افراد رانندگی می‌کنند.
(ح) با برخی اتومبیل‌ها رانندگی می‌شود.
(ط) با برخی اتومبیل‌ها رانندگی نمی‌شود.
(ی) هر شخصی با اتومیبل یا کامیون رانندگی می‌کند.
(ک) برخی افراد هر دو (اتومیبل و کامیون) را رانندگی می‌کنند.
(ل) برخی افراد اصلا رانندگی نمی‌کنند.
(م) هیچ کس هر دو (اتومیبل و کامیون) را رانندگی نمی‌کند.
(ن) هر اتومبیل حداکثر یک راننده دارد.
(س) هر کامیون دقیقا دو راننده دارد.
(ع) هر کس دقیقا رانندگی یک خودرو (اتومبیل یا کامیون) را انجام می‌دهد.

۱۳. نشان دهید اعداد اصم a و b موجود هستند به طوری که a^b یک عدد گویا است (از روش‌های مختلف برهان استفاده کنید).

۱۴. شخصی در کنار خیابان عده‌ای را مشاهده کرد که کنار هم ایستاده‌اند. با خودش فکر کرد که این مکان ایستگاه توبوس است و این خیابان به طرف مرکز شهر می‌رود. از سه نفر که در آنجا ایستاده بودند سوال کرد و جواب‌های زیر را شنید:

نفر اول: این خیابان به مرکز شهر می‌رود ولی این مکان ایستگاه اتوبوس نیست.

نفر دوم: این خیابان به مرکز شهر نمی‌رود ولی اینجا ایستگاه اتوبوس است.

نفر سوم: نه اینجا ایستگاه اتوبوس است و نه این خیابان به طرف مرکز شهر می‌رود.

از هر سه نفر پرسید که آیا راستگو هستید یا نه؟ هر سه گفتند که دو نفر از این سه، راستگو هستند و یک نفر دروغگو. آیا این شخص از این حرف‌ها می‌تواند نتیجه بگیرد که «اینجا ایستگاه اتوبوس است و خیابان به طرف مرکز شهر می‌رود»؟

۱۵. اتومبیل راننده‌ای در یک جاده دور افتاده از کار می‌افتد. با خود فکر میکند که بهتر است به یک تعمیرگاه رفته و یک تعمیرکار ماهر با خود بیاورد. برای کمک گرفتن از دو نفر که در آن نزدیکی کار می‌کردند؛ راهنمایی می‌خواهد. این دو نفر یا راستگو هستند یا دروغگو. نفر اول می‌گوید: «تعمیرگاه در سمت شمال جاده است یا این جاده به سمت جنوب به طرف تعمیرگاه می‌رود.» نفر دوم می‌گوید: «تعمیرگاه در سمت شمال جاده است و سمت جنوب این جاده به تعمیرگاه می‌رسد». نفر اول می‌گوید: «نفر دوم دروغگو است». نفر دوم می‌گوید: «اگر تعمیرگاه در سمت شمال جاده باشد آنگاه سمت جنوب آن به طرف تعمیرگاه می‌رود» . راننده تصمیم می‌گیرد به سمت جنوب جاده برود. آیا تصمیم درستی گرفته است؟ برای پاسخ خود از جدول ارزش استفاده کنید.

۱۶. شخصی در یک ایستگاه اتوبوس تابلوی مربوط به سه مسیر مختلف اتوبوس را می‌بیند (این مسیرها را به ترتیب $B_۱$، $B_۲$ و $B_۳$ بنامید). از سه نفر در مورد مقصد هر سه مسیر سوال می‌کند. پاسخ های زیر را دریافت می‌کند.

نفر اول: حداقل یکی از دو مسیر $B_۱$ و $B_۲$ به سمت مرکز شهر می‌رود.
نفر دوم: $B_۱$ به سمت مرکز شهر می‌رود.
نفر سوم: $B_۲$ و $B_۳$ به سمت مرکز شهر می‌روند.
نفر اول: $B_۳$ به سمت خارج از شهر می‌رود.
نفر دوم: $B_۲$ و $B_۳$ به سمت خارج شهر می‌روند.
نفر سوم: $B_۱$ به سمت خارج شهر می‌رود.

با فرض این که این سه نفر یا راستگو هستند یا دروغگو، این شخص برای رسیدن به مرکز شهر کدام مسیر را انتخاب کند؟ جواب خود را با جدول ارزش توجیه کنید.

۱۷. شخصی وارد یک کافی‌نت شده و در آنجا سه دستگاه رایانه می‌بیند. از شخصی که در آنجا حضور داشت می‌پرسد که آیا این رایانه‌ها به اینترنت متصل هستند. او پاسخ می‌دهد «رایانه اول به اینترنت متصل نیست، از دخترم که می‌داند (فردی راستگو است) بپرسید». دخترش می‌گوید: «رایانه دوم به اینترنت متصل است ولی رایانه سوم متصل نیست». شخص سومی که به این صحبت‌ها گوش می‌کرد گفت: «اگر رایانه دوم به اینترنت متصل باشد آنگاه رایانه اول نیز به اینترنت متصل است». با فرض این که هر یک از این سه نفر ممکن است راستگو یا دروغگو باشد، کدام رایانه به اینترنت متصل است؟ برای درستی پاسخ خود از جدول ارزش استفاده کنید.

۱۸. صحبت زیر بین دو طرفدار تیم ورزشی انجام می‌گیرد. با فرض این که نمی‌دانیم کدام راستگو و کدام دروغگو است، چه کسی طرفدار کدام تیم است؟

نفر اول: من طرفدار تیم زرد هستم.
نفر دوم: شما طرفدار تیم زرد نیستید بلکه طرفدار تیم نارنجی هستید.
نفر اول: ما هر دو، طرفدار تیم نارنجی هستیم.

۳.۱ استقرای ریاضی

اولین استفاده از استقرای ریاضی برای برهان در کتابی که توسط ریاضی‌دان قرن شانزدهم، فرانچسکو مرولیکو[۳] منتشر شد، دیده شده است. او در کتاب خود به نام Arithmeticorum Libri Duo خواص گوناگونی برای اعداد صحیح بیان کرده و برخی از آنها را با استقرا ثابت کرده است. یکی از اثبات‌های او این بود که نشان داد، مجموع n اولین عدد فرد، $n^۲$ است. اولین توصیف استقرای ریاضی نیز در سال ۱۸۳۸ توسط آگوستوس دمورگان ارائه شد. او اولین کسی بود که نام استقرا را برای چنین برهانی به کار برد.

اعتبار استقرای ریاضی به خاصیت **خوش ترتیبی** در مجموعه‌ها برمی‌گردد که یکی از اصول موضوعه مهم در نظریه اعداد است. بنابراین خاصیت، هر مجموعه ناتهی از اعداد صحیح نامنفی، کوچک‌ترین عضو دارد. از این اصل برای اثبات قضیه‌هایی استفاده می‌شود که با مجموعه اعداد صحیح ارتباط دارند.

استقرای ریاضی ابزاری قوی و موثر برای اثبات انواع خاصی از گزاره‌های ریاضی است که در آنها یک خصوصیت برای تمامی اعداد صحیح یا اعداد صحیح مثبت با شروع از نقطه خاصی برقرار است. به عنوان نمونه گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید.

[۳] Francesco Maurolico (1494-1575)

گزاره ۱ : مجموع n عدد صحیح با شروع از صفر با $\frac{۱}{۲}n(n+۱)$ برابر است.

گزاره ۲ : یک چند ضلعی محدب با $n \geq ۴$ راس، $\frac{۱}{۲}n(n-۳)$ وتر دارد.

محدوده استفاده از استقرای ریاضی بسیار وسیع است و شامل جبر، هندسه و بسیاری از حوزه‌های دیگر ریاضی است. آنچه در تمامی این گزاره‌ها مشترک است، عدد n است که در همه گزاره‌ها ظاهر می‌شود. در تمامی این گزاره‌ها به طور صریح یا ضمنی، فرض می‌شود که n می‌تواند هر عدد صحیح مثبت باشد.

چرا به برهان با استقرای ریاضی نیازمندیم؟

یکی از روش‌های متداول برای اثبات بسیاری از نتایج ریاضی این است که چند مثال خاص را بررسی کنیم. این کار، درک دلیل استفاده از استقرای ریاضی را آسان‌تر می‌کند.
فرض کنید می‌خواهید از نردبانی با بی‌نهایت پله بالا روید. چگونه مطمئن خواهید شد که حتما از عهده این کار برمی آیید. فرض کنید دو ادعای زیر را در مورد توانایی‌های خود دارید:

- می‌توانم از اولین پله بالا روم.
- اگر بتوانم روی پله‌ای از نردبان قرار گیرم، توانایی رفتن به پله بالاتر را دارم.

اگر هر دو ادعا درست باشند آنگاه بنا به گزاره اول، می‌توانید از اولین پله بالا روید و بنا به گزاره دوم، می‌توانید روی پله دوم بروید. دوباره با استفاده از گزاره دوم می‌توانید روی پله سوم، چهارم و بقیه نیز بروید. پس تا هر کجا که بخواهید می‌توانید از نردبان بالا روید. توجه کنید که برای اثبات ادعای توانایی خودتان، هر دو گزاره باید درست باشند. اگر تنها گزاره اول درست باشد، تضمینی برای صعود به پله دوم ندارید و اگر تنها ادعای دوم صحیح باشد، هیچ وقت صعود از پله‌های نردبان آغاز نخواهد شد.

برای توصیف یک مساله ریاضی، گزاره ۱ را در نظر بگیرید. نتیجه بررسی برقراری این گزاره برای چند مقدار n در زیر آمده است.

$$\begin{aligned} ۰+۱ &= ۱(۲)/۲ = ۱ \\ ۰+۱+۲ &= ۲(۳)/۲ = ۳ \\ ۰+۱+۲+۳ &= ۳(۴)/۲ = ۶ \end{aligned}$$

ممکن است این محاسبات قانع کننده به نظر برسند و نیازی به برهان بیشتر احساس نکنید. آیا اگر گزاره برای برای تمامی اعدادی که محاسبه کردیم برقرار باشد، می‌توان نتیجه گرفت که برای هر n نیز برقرار است؟ برای پاسخ به این سوال مثال دیگری را ملاحظه می‌کنیم.

گزاره ۳ : اگر p عدد اول دلخواهی باشد، آنگاه $۲^p - ۱$ نیز یک عدد اول است.

برای این کار چند نمونه از اعداد اول را کنترل می‌کنیم.

$$\begin{aligned} p=۲ \quad &; \quad ۲^p-۱=۳ \\ p=۳ \quad &; \quad ۲^p-۱=۷ \\ p=۵ \quad &; \quad ۲^p-۱=۳۱ \\ p=۷ \quad &; \quad ۲^p-۱=۱۲۷ \end{aligned}$$

چون ۳، ۷، ۳۱ و ۱۲۷ اعداد اول هستند؛ ممکن است قانع شویم که این گزاره برای هر عدد اول p برقرار است در حالی که برای $p = ۱۱$، $۲^{۱۱} - ۱ = ۲۰۴۷ = ۲۳ \times ۸۹$ که عدد اول نیست. پس این گزاره در حالت کلی درست نیست.

دوباره به گزاره ۱ برمی‌گردیم و این سوال را مطرح کنیم: «برای بررسی درست بودن این گزاره چند عدد را باید کنترل کنیم؟» فرض کنید رایانه‌ای در اختیار داریم و تعداد nهایی را که برای بررسی درست بودن گزاره بررسی می‌کنیم مهم نیست؛ در این صورت، امیدی وجود ندارد که عدد بزرگی بیابیم که گزاره برای آن درست نباشد. این امر دلیلی بر نیاز به استفاده از استقرای ریاضی است.

اثبات با استقرا چیست؟

فرض کنید به جای تلاش برای اثبات یک گزاره، باید دنباله‌ای از گزاره‌ها را (برای هر n یک گزاره) ثابت کنیم. این روش در استقرای ریاضی استفاده می‌شود؛ ابتدا برقراری گزاره اول ثابت می‌شود و سپس ثابت می‌کنیم اگر یکی از گزاره‌ها درست باشد گزاره بعدی نیز درست است. به این ترتیب درستی **تمامی** گزاره‌ها ثابت می‌شود.

این دو گام را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

گام پایه

ثابت کنید گزاره برای $n = ۱$ درست است، یا اگر تصریح شده باشد که گزاره برای $n \geq a$ درست است؛ آنگاه درستی گزاره را برای $n = a$ ثابت کنید. این گزاره را **پایه استقرا** گویند .

گام استقرایی

ثابت کنید اگر گزاره برای $n = k$ درست است، آنگاه باید برای $n = k + ۱$ نیز برقرار است. این گام مشکل‌ترین قسمت است و شاید تفکیک آن به چند مرحله مفید باشد.

مرحله ۱ گزاره را به طور دقیق برای $n = k$ بنویسید. این گزاره فرض مساله است و آن را **فرض استقرا** گویند .

مرحله ۲ گزاره را به طور دقیق برای $n = k + ۱$ بنویسید. برقراری این گزاره باید ثابت شود. این اصل را در حین کار در نظر داشته باشید این گزاره را **حکم استقرا** گویند.

مرحله ۳ با استفاده از فرض مرحله ۱، درستی گزاره مرحله ۲ را ثابت کنید. برای انجام این کار دستورالعمل خاصی وجود ندارد و از مساله‌ای به مساله دیگر متفاوت بوده و به موضوع ریاضی مورد بحث بستگی دارد. باید از نبوغ و دانش ریاضی خود استفاده کنید. سوال اصلی این است: «چگونه می‌توان از مرحله ۱ به مرحله ۲ رسید؟»

وقتی گام‌های پایه و استقرایی انجام شدند، می‌توان نتیجه گرفت که گزاره برای هر $n \geq ۱$ (یا اگر از $n = a$ شروع کنیم، برای هر $n \geq a$) درست است.

برای توصیف بهتر مطلب، می‌توان استقرای ریاضی را به ماشین «اثبات گزاره» تشبیه کرد. گزاره را برای $n = ۱$ ثابت کردیم. با گام استقرایی، چون گزاره برای $n = ۱$ درست است، پس برای

$n = ۲$ نیز درست است. دوباره، بنا بر گام استقرایی، چون گزاره برای $n = ۲$ درست است، پس برای $n = ۳$ نیز درست است و باز چون گزاره برای $n = ۳$ درست است، پس برای $n = ۴$ نیز درست است و کار به این ترتیب ادامه می‌یابد.

چون گام استقرایی را ثابت کردیم، این فرایند هرگز خاتمه نمی‌یابد. می‌توان ماشین را تنظیم کرد تا کار اثبات را اجرا کند و هرگز متوقف نشود. در این ماشین، بزرگ بودن n اهمیتی ندارد. فرض کنید عددی مانند N وجود دارد که گزاره برای آن نادرست است. بنابراین، وقتی به گام $N - ۱$ برسیم گزاره‌ای از نوع زیر داریم:

گزاره برای $n = N - ۱$ درست ولی برای $n = N$ نادرست است.

این گزاره با گام استقرایی متناقض بوده و ناممکن است. پس گزاره برای **هر** n درست است.

اجرای این روش را در اثبات گزاره ۱ بررسی می‌کنیم.
گام پایه: اگر $n = ۰$، آنگاه مجموع صفر است. در این صورت

$$\frac{۱}{۲}n(n+۱) = \frac{۱}{۲} \times ۰ \times ۱ = ۰.$$

پس نتیجه برای $n = ۰$ درست است.
گام استقرایی:
مرحله اول: فرض استقرا برقراری $۱ + ۲ + ۳ + \cdots + k = \frac{۱}{۲}k(k+۱)$ را تصریح می‌کند.
مرحله دوم: باید نشان دهیم:

$$۱ + ۲ + ۳ + \cdots + (k+۱) = \frac{۱}{۲}(k+۱)[(k+۱)+۱] = \frac{۱}{۲}(k+۱)(k+۲).$$

مرحله سوم: چگونه می‌توان مرحله دوم را از مرحله اول نتیجه گرفت؟ ملاحظه می‌شود که سمت چپ رابطه مرحله دوم، با اضافه کردن $(k+۱)$ به سمت چپ رابطه مرحله اول تولید می‌شود. پس،

$$\begin{aligned} ۱ + ۲ + ۳ + \cdots + (k+۱) &= ۱ + ۲ + ۳ + \cdots + k + (k+۱) \\ &= \frac{۱}{۲}k(k+۱) + (k+۱) \qquad \text{بنابر فرض استقرا} \\ &= (k+۱)(\frac{۱}{۲}k+۱) \qquad \text{فاکتورگیری} \\ &= \frac{۱}{۲}(k+۱)(k+۲) \qquad \text{آنچه می‌خواستیم ثابت کنیم} \end{aligned}$$

به این ترتیب انجام گام استقرایی کامل می‌شود. بنابراین، گزاره برای هر $n \geq ۰$ برقرار است.

شکل‌های اصلاح شده‌ای از اصل استقرا

شکل‌های اصلاح شده‌ای از اصل استقرای ریاضی وجود دارد. در ادامه به چند اصلاح اشاره می‌کنیم:

استقرای عام

- گام پایه: گزاره برای $n = ۱$ درست است.
- گام استقرایی: اگر گزاره برای هر $۱ \leq k \leq n$ درست باشد آنگاه برای $n + ۱$ نیز درست است.

استقرای عام گاهی استقرای قوی نیز نامیده می‌شود. در این صورت گزاره برای تمامی اعداد صحیح مثبت نیز درست است. برای نمونه‌ای از استقرای عام به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱۲.۱ فرض کنید $a_۰ = ۱$، $a_۱ = ۲$ ، $a_۲ = ۳$ و برای هر $k \geq ۳$؛

$$a_k = a_{k-۱} + a_{k-۲} + a_{k-۳}.$$

با استقرای قوی نشان دهید برای هر $n \geq ۰$ رابطه $a_n \leq ۲^n$ برقرار است.

حل : حکم برای $n = ۰, ۱, ۲$ بدیهی است. فرض کنید حکم برای هر $۳ \leq k < n$ برقرار است. ثابت می‌کنیم حکم برای n نیز برقرار است. با توجه به تعریف اعضای دنباله داریم:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-۱} + a_{n-۲} + a_{n-۳} \\ &\leq ۲^{n-۱} + ۲^{n-۲} + ۲^{n-۳} \\ &\leq ۲^۰ + ۲^۱ + \cdots + ۲^{n-۳} + ۲^{n-۲} + ۲^{n-۱} \\ &= ۲^k - ۱ \leq ۲^k \end{aligned}$$

و به این ترتیب حکم ثابت می‌شود. توجه کنید که در این استدلال از استقرای قوی استفاده شده است. $\diamondsuit$

استقرای پسرو

- گام پایه: گزاره برای $n = ۱$ درست است.
- اگر گزاره برای $n > ۱$ درست باشد آنگاه برای $n - ۱$ نیز درست است.

در این صورت گزاره برای هر عدد صحیح مثبت درست است.

تمرین ۳.۱

۱. درستی گزاره ۲ را با استقرا ثابت کنید.

۲. با استقرا روی n ثابت کنید گزاره

$$\begin{aligned} (x+a)^n &= x^n + nx^{n-۱}a + \frac{n(n-۱)}{۲!}x^{n-۲}a^۲ + \\ & \frac{n(n-۱)(n-۲)}{۳!}x^{n-۳}a^۳ + \cdots + nxa^{n-۱} + a^n, \end{aligned}$$

برای هر عدد طبیعی $n \geq ۰$ درست است.

۳. با استقرا ریاضی درستی گزاره‌های زیر را ثابت کنید:

(آ) nامین عدد فرد $۲n - ۱$ است.

(ب) مجموع اولین n عدد فرد $n^۲$ است.

(ج) برای هر عدد صحیح مثبت n، $n(n+۱)$ زوج است.

(د) برای هر عدد صحیح مثبت $n \geq ۲$، $n^۳ - n$ مضربی از ۶ است.

(ه) برای هر $n \geq ۱$ و با فرض $x \neq ۱$ داریم:

$$\frac{x^{n+۱} - ۱}{x - ۱} = ۱ + x + x^۲ + \cdots + x^n.$$

(و) برای هر $n \geq ۰$ داریم $(۱ + x)^n \geq ۱ + nx$ که در آن x یک عدد حقیقی بزرگ‌تر از صفر است.

(ز) برای هر $n \geq ۱$ داریم:

$$\sum_{r=۱}^{n} r(r+۱) = \frac{۱}{۳} n(n+۱)(n+۲),$$

یعنی $۱(۲) + ۲(۳) + ۳(۴) + \cdots + n(n+۱) = \frac{۱}{۳}n(n+۱)(n+۲)$.

(ح) برای هر $n \geq ۳$، $n^۲ \geq ۲n + ۱$.

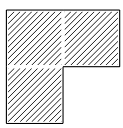
(ط) برای هر $n \geq ۴$، $۲^n \geq n^۲$.

(ی) مجموع اندازه زاویه‌های داخلی یک n ضلعی برای هر $n \geq ۳$، $۱۸۰(n - ۲)$ درجه است.

(ک) برای هر $n \geq ۴$ داریم: $n! > ۲^n$.

۴. ثابت کنید هر عدد صحیح $n > ۱$ یا اول است یا به صورت حاصل‌ضرب عامل‌های اول نوشته می‌شود (راهنمایی: از استقرای قوی استفاده کنید).

۵. نشان دهید هر مربع با ابعاد ۲^n در ۲^n را می‌توان با کاشی‌هایی به شکل L موزاییک کرد (شکل بعدی را نگاه کنید) و یک خانه پوشش داده نشود.



۶. ثابت کنید اگر $x + \frac{۱}{x}$ عدد صحیح باشد آنگاه برای هر n صحیح مثبت، $x^n + \frac{۱}{x^n}$ نیز یک عدد مثبت است.

۷. نشان دهید برای هر n فرد، $n^۲$ نیز فرد است.

۸. با استقرا درستی روابط زیر را تحقیق کنید:

(آ) $$۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \cdots + n^۲ = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

(ب) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(ج) $1^4+2^4+3^4+\cdots+(n-1)^4=\frac{n^5}{5}-\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}$

(د) $1^5+2^5+3^5+\cdots+(n-1)^5=\frac{n^6}{6}-\frac{n^5}{2}+\frac{5n^4}{12}-\frac{n^2}{12}$

(ه) $1^6+2^6+3^6+\cdots+(n-1)^6=\frac{n^7}{7}-\frac{n^6}{2}+\frac{n^5}{2}-\frac{n^3}{6}+\frac{n}{42}$

(و) $1^7+2^7+3^7+\cdots+(n-1)^7=\frac{n^8}{8}-\frac{n^7}{2}+\frac{7n^6}{12}-\frac{7n^4}{24}+\frac{n^2}{12}$

(ز) $1^8+2^8+3^8+\cdots+(n-1)^8=\frac{n^9}{9}-\frac{n^8}{2}+\frac{2n^7}{3}-\frac{7n^5}{15}+\frac{2n^3}{9}-\frac{n}{30}$

(ح) $1\times2\times3+2\times3\times4+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

(ط) $1\times1!+2\times2!+\cdots+n\times n!=(n+1)!-1$

(ی) $2!.4!.6!\cdots(2n)!\geq((n+1)!)^n$

(ک) $\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\times(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

۹. ثابت کنید برای هر n اعداد زیر صحیح هستند:

(آ) $\frac{n^3+5n}{6}$

(ب) $\frac{6^{2n-1}+1}{7}$

(ج) $\frac{2^{3^n}+1}{3^{n+1}}$

۱۰. درستی نابرابری‌های زیر را ثابت کنید:

(آ) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}(n>1)$

(ب) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2$

(ج) راهنمایی: از استقرای پسرو استفاده کنید.

$$\frac{1}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}\leq(x_1\times\cdots\times x_n)^{\frac{1}{n}}\leq\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}.$$

(د) $(n+1)^2\leq2^n$ و $n\geq6$

(ه) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\leq2\sqrt{n}$

۱۱. با n دایره یک صفحه را به چند ناحیه تفکیک می‌شود به طوری که هر دو دایره در دو نقطه تلاقی داشته باشند و هر سه دایره از یک نقطه عبور نکنند. ادعای خود ر ا با استقرا ثابت کنید.

۱۲. تعدادی خط و دایره روی یک صفحه رسم شده‌اند. ثابت کنید ناحیه‌هایی را که با تلاقی خطوط و دایره‌ها به وجود آمده‌اند، می‌توان چنان با دو رنگ (آبی و قرمز) رنگ آمیزی کرد به طوری که ناحیه‌های مجاور رنگ‌های متفاوت داشته باشند. ادعای خود را با استقرا ثابت کنید.

۱۳. n خط راست روی یک صفحه رسم شده‌اند به طوری که هر دو خط همدیگر را قطع می‌کنند و هیچ سه خط از یک نقطه عبور نمی‌کنند. این خطوط صفحه را به چند ناحیه تفکیک می‌کنند؟ ادعای خود را با استقرا ثابت کنید.

۱۴. تعدادی خط در یک صفحه رسم شده‌اند و یک طرف هر خط سایه دارد. ثابت کنید ناحیه‌ای وجود دارد که به طور کامل با سایه‌هایش پوشانده شده است.

۱۵. فرض کنید m, n اعداد صحیح نامنفی بوده و $m > ۰$. با استقرا ثابت کنید اعدادی مانند q و r با شرط $۰ \leq r < m$ وجود دارد به طوری که $n = qm + r$.

۱۶. یک ملخ روی یک نوار از مربع‌ها نشسته است و در هر بار، یک یا دو خانه به جلو می‌پرد. به چند طریق می‌تواند به خانه n ام برسد. ادعای خود را با استقرا ثابت کنید.

۱۷. مسافری به یک هتل وارد می‌شود ولی پولی برای پرداخت اجاره اتاق هتل ندارد. با صاحب هتل توافق می‌کند که برای هر شب اقامت، یک حلقه از زنجیر طلایی که دارد به هتل‌دار بدهد (پرداخت‌ها باید روزانه انجام گیرد). او مجاز است که n حلقه را ببرد. حداکثر مدت اقامت او در هتل چند روز است (بر حسب n بیابید). ادعای خود را با استقرا ثابت کنید.

۱۸. فرض کنید یک خودپرداز تنها اسکناس‌های دو و پنج هزار تومانی دارد. ثابت کنید هر مبلغ بزرگ‌تر یا مساوی چهار هزار تومان را می‌توان با این دستگاه پرداخت کرد. برای اثبات از استقرا استفاده کنید.

۱۹. شخصی با استقرا روی تعداد اسب‌ها به صورت زیر ثابت می‌کند که تمامی اسب‌ها همرنگ هستند. این استدلال چه ایرادی دارد؟

- گام پایه: اگر فقط یک اسب وجود داشت باشد آنگاه از یک رنگ است.
- گام استقرایی: فرض کنیم اسب‌ها از ۱ تا n شماره‌گذاری شده‌اند (فرض استقرا). فرض کنید $n + ۱$ اسب داریم. بنا به فرض استقرا، اسب‌ها از ۱ تا n همرنگ هستند (مثلاً سفید). بنابراین، اسب شماره ۲ نیز سفید است. دوباره بنابر فرض استقرا، اسب‌های از ۲ تا $n + ۱$ نیز همرنگ هستند (سفید). پس تمامی $n + ۱$ اسب سفید هستند.

۲۰. ثابت کنید برای هر عدد صحیح $n > ۲۳$ اعداد صحیح نامنفی x و y موجودند به طوری که $n = ۷x + ۵y$.

(راهنمایی: از روش به کار رفته در تمرین ۱۸ استفاده کنید).

۲۱. با استقرا ثابت کنید برای هر عدد صحیح $n \geq ۲$ عدد

$$\sqrt{۱ + \sqrt{۱ + \sqrt{۱ + \cdots}}}$$

عدد گویا نیست (n تعداد ۱ ها در این رابطه است). این عدد را مشخص کنید.

۲۲. با استقرا برقراری قوانین دمورگان را برای $n \geq ۲$ گزاره ثابت کنید.

۲۳. با استقرا ثابت کنید برای هر دو عدد صحیح نامنفی a و b، اعداد صحیح s و t موجودند به طوری که $sa + tb$ بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و b است.

۲۴. با استقرای قوی ثابت کنید هر عدد طبیعی را می‌توان در مبنای دو نمایش داد.

۲۵. ثابت کنید برای هر عدد صحیح $n \geq ۱$، $x^n - y^n$ بر $x - y$ بخش‌پذیر است.

۲۶. تعداد n نفر در یک مهمانی حضور دارند ($n \geq ۲$) که می‌خواهند دو به دو با هم دست دهند. چند بار دست دادن در این مجلس مهمانی اتفاق می‌افتد. ادعای خود را با استقرا ثابت کنید.

۲۷. نشان دهید:

$$\sqrt{۲ + \sqrt{۲ + \sqrt{۲ + \cdots + \sqrt{۲}}}} = ۲ \cos \frac{\pi}{۲^{n+۱}}$$

که در آن n تعداد ۲ ها در سمت چپ این رابطه است.

۲۸. دنباله چندجمله‌ای چبی‌شف به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} P_۰(x) &= ۱ \\ P_۱(x) &= x \\ P_{n+۱}(x) &= xP_n(x) - P_{n-۱}(x), n > ۱ \quad \text{برای} \end{aligned}$$

با استقرا نشان دهید

$$P_n(۲ \cos \theta) = \frac{\sin(n+۱)\theta}{\sin \theta}$$

۲۹. ثابت کنید:

$$\sin \theta + \sin ۲\theta + \cdots + \sin n\theta = \frac{\sin \frac{(n+۱)\theta}{۲} \sin \frac{n\theta}{۲}}{\sin \frac{\theta}{۲}}.$$

۳۰. فرض کنید $a_n = a_{n-۱} + ۲a_{n-۲} + ۱$، و $a_۱ = a_۲ = ۱$. با استقرا روی n نشان دهید

$$a_n = ۲^{n-۱} - \frac{(-۱)^n + ۱}{۲}.$$

۳۱. مجموع زیر را مشخص کرده و با استقرا ادعای خود را ثابت کنید:

$$S_n = \frac{۳}{۱^۲ \times ۲^۲} + \frac{۵}{۲^۲ \times ۳^۲} + \cdots + \frac{۲n + ۱}{n^۲ \times (n+۱)^۲}.$$

فصل ۲

مجموعه، تابع و رابطه

در نظریه مجموعه‌ها، مجموعه‌ها، که در تمامی قسمت‌های ریاضیات مدرن دیده می‌شوند، به عنوان اشیا مجرد مطالعه می‌شوند. زبان نظریه مجموعه‌ها، در عین سادگی، برای قالب‌بندی مفاهیم ریاضی به حد کافی جامع بوده و در کنار حساب گزاره‌ها، زیربنای واقعی ریاضیات را تشکیل می‌دهد. به عنوان یک نظریه ریاضی، نظریه مجموعه‌ها ساختار داخلی قوی دارد و روش‌های موجود در این نظریه، ابزاری‌های قوی برای به کار گیری آن در سایر حوزه‌های علوم ریاضی و مهندسی هستند. این نظریه، با تاکیدی که بر سازگاری و استقلال برهان‌ها دارد، ابزاری مناسب را برای سنجش سازگاری قوی گزاره‌های ریاضی ایجاد می‌کند.

در این فصل با مقدمات نظریه مجموعه‌ها آشنا می‌شویم. خوانندگانی که به دیدگاه ریاضی مساله علاقمند بوده و می‌خواهند از منظر اصول موضوعه، نظریه مجموعه‌ها را مطالعه کنند می‌توانند از کتاب‌های تخصصی‌تر مانند [۷] استفاده کنند.

۱.۲ مجموعه

دو مفهوم اولیه **مجموعه** و **عضویت** در نظریه مجموعه‌ها را به عنوان **تعریف نشده** در نظر می‌گیریم و سایر مفاهیم نظریه مجموعه‌ها را بر اساس این دو مفهوم پایه‌ریزی می‌کنیم.

گرچه در ظاهر، مفاهیم مربوط به مجموعه و عضویت بدیهی به نظر می‌رسند، ولی وجود تناقض‌نماهایی موجب توسعه این علم از دیدگاه اصول موضوعه شد. پارادوکس راسل یکی از معروف‌ترین تناقض‌نماهای منطق یا نظریه مجموعه‌ها است. این پارادوکس در سال ۱۹۰۱ توسط برتراند راسل[۱] کشف شد و انگیزه بسیاری از مطالعات در منطق، نظریه مجموعه‌ها، فلسفه و مبانی ریاضیات شد. این پارادوکس با در نظر گرفتن مجموعه تمامی مجموعه‌هایی که عضو خودشان نیستند ظاهر می‌شود. به نظر می‌رسد که این مجموعه عضو خودش است اگر و فقط اگر عضو خودش نباشد که این یک تناقض‌نما است.

به وضوح برخی از مجموعه‌ها، مانند مجموعه فنجان‌های قهوه، عضو خودشان نیستند. در حالی که به نظر می‌رسد برخی از مجموعه‌ها، شاید مجموعه‌هایی غیر از فنجان‌های قهوه، عضو خودشان هستند. مجموعه تمامی مجموعه‌هایی که عضو خودشان نیستند را با R نشان دهید. آیا R عضو خودش است یا نه؟ اگر R عضو خودش است، بنا به تعریف نمی‌تواند عضو خودش باشد. به طور مشابه، اگر R عضو خودش نیست، آنگاه بنا به تعریف باید عضو خودش باشد.

---

[۱] Bertrand Arthur William Russell (1872-1970)

با توجه به آنچه گفته شد، تعریف مشخصی برای مجموعه وجود ندارد، با این حال می‌توان گفت که یک مجموعه گردایه‌ای از اشیای مشخصی است که به آنها عناصر مجموعه گویند. برای آن که یک مجموعه خوش تعریف باشد لازم است که گزاره زیر یک گزاره خوش تعریف باشد:

آیا x به عنوان یک شی، عضو A به عنوان مجموعه است؟

اگر این سوال دقیقا فقط یکی از دو جواب «بلی» و یا «نه» را داشته باشد، آنگاه چنین تعریفی برای مجموعه خوش تعریف است.
مجموعه را می‌توان با نوشتن عناصر آن بین دو علامت آکولاد نشان داد. به عنوان مثال مجموعه $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ که پنج عضو را شامل است. نماد $\in$ برای بیان این که عنصری در یک مجموعه قرار دارد (عضو آن مجموعه است) به کار می‌رود. به عنوان مثال $۳ \in A$. نقیض آن با $\notin$ نوشته می‌شود؛ مثلاً $۷ \notin A$. اگر مجموعه‌ای متناهی باشد، تعداد اعضای آن با $|A|$ نشان داده می‌شود. به عنوان مثال چون مجموعه A پنج عضو دارد؛ می‌نویسیم: $|A| = ۵$.

در ادامه چند مجموعه مهم معرفی می‌شوند.

۱. مجموعه اعداد طبیعی با $\mathbb{N} = \{۰, ۱, ۲, ۳, \ldots\}$ نشان داده می‌شود. توجه کنید که صفر در اینجا به عنوان یک عدد طبیعی فرض می‌شود.

۲. مجموعه اعداد صحیح به صورت $\mathbb{Z} = \{\ldots, -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, \ldots\}$ تعریف می‌شود.

۳. عددی را گویا گویند که بتوان آن را به صورت p/q نوشت که در آن $q \neq ۰$ و p و q اعداد صحیح هستند. $\mathbb{Q}$ مجموعه اعداد گویا را نشان می‌دهد.

۴. هر عددی که نتوان آن را به صورت یک عدد گویا بیان کرد، عدد اصم نامیده می‌شود. هر عدد حقیقی یا یک عدد گویا است و یا یک عدد اصم. مجموعه اعداد حقیقی با $\mathbb{R}$ نمایش داده می‌شود.

۵. هیچ عدد حقیقی وجود ندارد که توان دوم آن منفی باشد. با تعریف عدد موهومی i به طوری که $i^۲ = -۱$ اعداد جدیدی تعریف می‌شوند که آنها را عدد مختلط می‌نامند. هر عدد مختلط از دو قسمت حقیقی و موهومی تشکیل شده و با نماد $z = x + iy$ نشان داده می‌شود که در آن x و y اعداد حقیقی هستند. $\mathbb{C}$ مجموعه اعداد مختلط را نشان می‌دهد.

اگر S یکی از این مجموعه‌ها باشد نمادهای زیر را نیز استفاده می‌کنیم:

۱. از S^+ برای نشان دادن اعضای مثبت S استفاده می‌شود. به عنوان مثال مجموعه اعداد صحیح مثبت با $\mathbb{Z}^+ = \{۱, ۲, ۳, \ldots\}$ نشان داده می‌شود.

۲. از S^- برای نشان دادن اعضای منفی S استفاده می‌شود. به عنوان مثال مجموعه اعداد صحیح منفی با $\mathbb{Z}^- = \{-۱, -۲, -۳, \ldots\}$ نشان داده می‌شود.

۳. S^* برای نشان دادن اعضای غیرصفر S به کار می‌رود. به عنوان مثال مجموعه اعداد حقیقی غیرصفر با $\mathbb{R}^*$ نشان داده می‌شود.

روش دیگر برای تعریف یک مجموعه، **نمادهای مجموعه‌ساز** هستند. در این روش، خاصیت از پیش مشخص شدهٔ $P(x)$ برای اعضای مجموعه بیان می‌شود که برقراری خاصیت $P(x)$ برای اعضای مجموعه قابل بررسی است. به عنوان مثال $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid ۱ \leq x \leq ۵\}$ مجموعه اعداد صحیحی

مانند x که در خاصیت $۱ \leq x \leq ۵$ صدق می‌کند را نمایش می‌دهد؛ پس $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$. در حالت کلی $A = \{x \in \mathcal{U} \mid P(x)\}$، که در آن $\mathcal{U}$ مجموعه آن عناصری است که خاصیت $P(x)$ برای آنها برقرار است. اگر ابهامی در درک مطلب وجود نداشته باشد می‌نویسیم: $A = \{x|P(x)\}$.

در نظریه مجموعه‌ها، **مجموعه جهانی** به مجموعه‌ای گفته می‌شود که تمامی عناصری را که امکان مصداق بودن برای یک خاصیت (نه خاصیت مشخصی) را داشته باشند؛ شامل شود.

اصل موضوعه مجموعه جهانی:

مجموعه $\mathcal{U} = \{x|x = x\}$ موجود است.

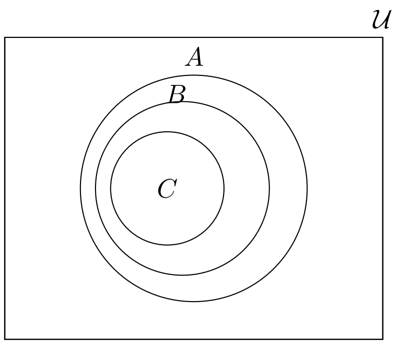
سوالی که ممکن است مطرح شود این است که چه زمانی دو مجموعه را یکسان در نظر می‌گیریم. اصل بعدی در این خصوص است.

اصل موضوعه بسط:

دو مجموعه را **مساوی** گویند هرگاه از عناصر یکسانی تشکیل شوند. به عبارت دیگر

$$A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

گوییم A **زیرمجموعه** B است، یا B شامل A است اگر هر عضو A در B قرار داشته باشد و آن را با نماد $A \subseteq B$ نمایش می‌دهیم. به عنوان مثال اگر $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{a, b, c, d, e\}$؛ آنگاه $A \subseteq B$. مجموعه A **زیرمجموعه محض** B است و با $A \subset B$ نشان داده می‌شود هر گاه $A \subseteq B$ و $A \neq B$. به عبارت دیگر B عضوی دارد که در A قرار ندارد. در شکل بعدی، سه مجموعه A، B و C به صورت نموداری نشان داده شده‌اند که خاصیت زیرمجموعه‌بودن بین آنها برقرار است.



$C \subseteq B \subseteq A \subseteq \mathcal{U}$

مجموعه تهی به مجموعه‌ای گفته می‌شود که عضوی ندارد (مجموعه پوچ یا مجموعه خالی نیز گفته می‌شود) و با $\varnothing$ یا $\{\ \}$ نشان داده می‌شود.

توجه کنید که یک مجموعه می‌تواند عضو یک مجموعه دیگر باشد که این با مفهوم زیرمجموعه بودن یکسان نیست. به عنوان مثال اگر $A = \{۱, a, \{۳, t\}, \{۱, ۲, ۳\}\}$ و $B = \{۳, t\}$؛ آنگاه B عضوی از A است؛ یعنی $B \in A$ در حالی که $B \nsubseteq A$.

گردایه تمامی زیرمجموعه‌های یک مجموعه را **مجموعه توان** A گویند و با نماد $\mathcal{P}(A)$ نشان می‌دهند. به عنوان مثال اگر $A = \{۱, ۲, ۳\}$ باشد آنگاه:

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{۱\}, \{۲\}, \{۳\}, \{۱, ۲\}, \{۱, ۳\}, \{۲, ۳\}, \{۱, ۲, ۳\}\}.$$

بنا بر اصل موضوعه بسط، دو مجموعه در مفهوم متعارف یکسان هستند هرگاه اعضای یکسانی داشته باشند، به عنوان نمونه دو مجموعه $\{a, a, b\}$ و $\{a, b\}$ یکسان هستند زیرا دقیقاً اعضای یکسانی دارند یعنی a و b. در برخی کاربردها، پذیرفتن وجود اعضای تکراری مفید است. در چنین حالتی از مفهوم **چندمجموعه** که از دیدگاه ریاضی با مفهوم مجموعه متفاوت است، استفاده می‌کنیم که در آنها وجود عضوهای تکراری مجاز است. به عنوان مثال، چندمجموعه‌های $\{a, a, b\}$ و $\{a, b\}$ یکسان نیستند، زیرا در اولی عضو a دوبار تکرار شده است در حالی که در دومی تنها یک بار. کاربردهای زیادی در علوم مختلف برای چندمجموعه‌ها وجود دارد. از جمله می‌توان منطق، فلسفه ، زبان شناسی، فیزیک و علوم رایانه را نام برد. در علوم رایانه، فرایندهای جستجو و مرتب‌سازی داده‌ها از مفهوم چندمجموعه و روابط بین آنها به وفور استفاده می‌کنند. علاقمندان به چندمجموعه‌ها، اعمال بین آنها و کاربردهایی از آن می‌توانند به [۳۲] و منابع موجود در آن مراجعه کنند. در این کتاب تنها مفهوم مجموعه مورد بررسی قرار می‌گیرد.

نمودارهای وِن

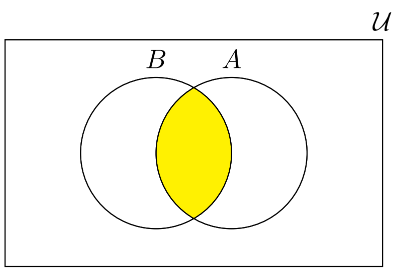
جان ون[۲] فیلسوف و منطق‌دان بریتانیایی بود که به دلیل معرفی نمودار ون معروف است. این روش نمایش در رشته‌های دیگری مانند احتمال، منطق، آمار و علوم کامپیوتر به کار می‌رود. نمودارهای ون نمایش تصویری مجموعه‌ها با ناحیه‌های محصور در روی صفحه است. به عنوان نمونه، در شکل صفحه قبل، مستطیل مجموعه مرجع (مجموعه جهانی) را نشان می‌دهد و مجموعه‌های A، B و C با دایره‌هایی مشخص شده‌اند.

عملگرهای مجموعه‌ای

۱. **اشتراک:** اشتراک دو مجموعه، مجموعه اعضای مشترک آن دو مجموعه است.

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

به صورت نموداری، مفهوم اشتراک دو مجموعه در شکل بعدی دیده می‌شود. ناحیه پررنگ در این شکل، نمایش اشتراک دو مجموعه است.

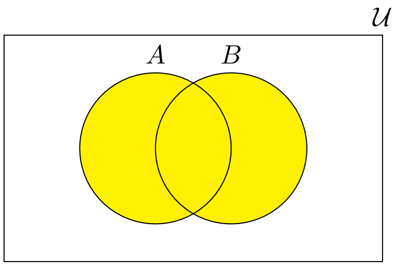


اگر $A \cap B = \varnothing$، دو مجموعه را **مجزا** گویند.

[۲] John Venn (1834 – 1923)

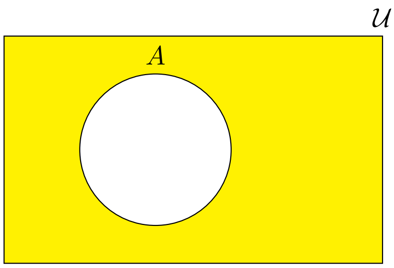
۲. **اجتماع:** اجتماع دو مجموعه، مجموعه اعضایی است که حداقل به یکی از دو مجموعه متعلق هستند: در نمودار ون بعدی، ناحیه پررنگ اجتماع دو مجموعه A و B را نشان می‌دهد.

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$



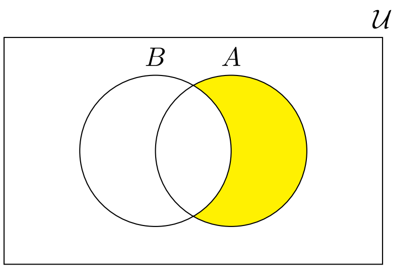
۳. **متمم:** مجموعه اعضایی از مجموعه مرجع که به مجموعه مورد بحث متعلق نباشند:

$$\overline{A} = \{x \in \mathcal{U} \mid x \notin A\}.$$



۴. **تفاضل** یا **متمم نسبی**: مجموعه آن عضوهایی که در یک مجموعه وجود دارند ولی در دیگری نیستند:

$$A - B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\} = A \cap \overline{B}.$$



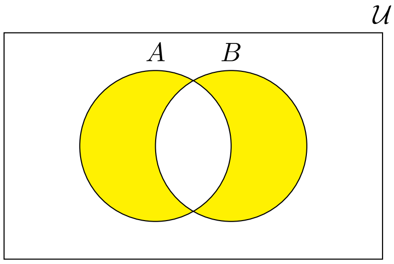
۵. **تفاضل متقارن:** تفاضل متقارن دو مجموعه، مجموعه آن اعضایی است که فقط به یکی از دو مجموعه تعلق دارند نه به هر دوی آنها.

$$A \oplus B = \{x \mid (x \in A) \oplus (x \in B)\}. \qquad (۱.۲)$$

این عملگر را می‌توان به صورت

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A), \qquad (۲.۲)$$

نیز نوشت.



خواص مجموعه‌ها

عملگرهای مجموعه‌ای در خواص زیر صدق می‌کنند:

۱. **قوانین شرکت‌پذیری :**

$$\begin{aligned} A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C, \\ A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C. \end{aligned}$$

۲. **قوانین جابجایی :**

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A, \\ A \cap B &= B \cap A. \end{aligned}$$

۳. **قوانین پخش‌پذیری :**

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C), \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

۴. **قوانین عضو خنثی :**

$$\begin{aligned} A \cup \varnothing &= A, \\ A \cap \mathcal{U} &= A. \end{aligned}$$

۵. **قوانین عضو متمم :**

$$\begin{aligned} A \cup \overline{A} &= \mathcal{U}, \\ A \cap \overline{A} &= \varnothing. \end{aligned}$$

۶. **قوانین خودتوان :**

$$\begin{aligned} A \cup A &= A, \\ A \cap A &= A. \end{aligned}$$

۷. **قوانین کران :**

$$\begin{aligned} A \cup \mathcal{U} &= \mathcal{U}, \\ A \cap \varnothing &= \varnothing. \end{aligned}$$

۸. **قوانین جذب :**

$$\begin{aligned} A \cup (A \cap B) &= A, \\ A \cap (A \cup B) &= A. \end{aligned}$$

۹. **قانون پیچش:**

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

۱۰. **قوانین صفر و یک :**

$$\overline{\varnothing} = \mathcal{U}, \quad \overline{\mathcal{U}} = \varnothing.$$

۱۱. **قوانین دمورگان:**

$$\begin{aligned} \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B}, \\ \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B}. \end{aligned}$$

اجتماع و اشتراک تعمیم‌یافته

گردایه‌ای از مجموعه‌های $A_۱, A_۲, \ldots, A_N$ داده شده‌است. اجتماع این مجموعه‌ها، مجموعه‌ای است که اعضای آن حداقل در یکی از این مجموعه‌ها باشد (در اینجا n نشان دهنده عددی صحیح از ۱ تا N است):

$$\bigcup_{n=۱}^{N} A_n = A_۱ \cup A_۲ \cup \ldots \cup A_N = \{x \mid \exists n; (x \in A_n)\}.$$

به طور مشابه، اشتراک این مجموعه‌ها، مجموعه‌ای است که عناصر آن به طور همزمان در تمامی مجموعه‌ها وجود دارد:

$$\bigcap_{n=۱}^{N} A_n = A_۱ \cap A_۲ \cap \ldots \cap A_N = \{x \mid \forall n; (x \in A_n)\}.$$

این تعریف‌ها را می‌توانیم برای تعداد نامتناهی از مجموعه‌ها نیز استفاده کنیم. به عنوان نمونه، فرض کنید $S_n = \{kn \mid k = ۲, ۳, ۴, \ldots\}$ مجموعه مضارب n که بزرگ‌تر از n هستند، باشد. آنگاه

$$\bigcup_{n=۲}^{\infty} S_n = S_۲ \cup S_۳ \cup S_۴ \cup \ldots = \{۴, ۶, ۸, ۹, ۱۰, ۱۲, ۱۴, ۱۵, \ldots\}.$$

افرازها

یک **افراز** مجموعه X، گردایه‌ای $\mathcal{S}$ از زیرمجموعه‌های ناتهی X است که با همدیگر تلاقی ندارند و اجتماع آن‌ها تمامی X را تولید می‌کند. به عنوان نمونه، افرازی از

$$X = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰\},$$

به صورت

$$\mathcal{S} = \{\{۱, ۲, ۴, ۸\}, \{۳, ۶\}, \{۵, ۷, ۹, ۱۰\}\},$$

است. در افرازی مانند $\mathcal{S}$، هر عضو X دقیقاً به یک عضو $\mathcal{S}$ تعلق دارد.

مثال ۱.۲ تفکیک اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ به اعداد زوج و فرد یک افراز است؛ $\mathcal{S} = \{\mathbb{E}, \mathbb{O}\}$ که در آن $\mathbb{E} = \{۲n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ و $\mathbb{O} = \{۲n + ۱ \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

مثال ۲.۲ تفکیک $\mathbb{Z}$ به اعداد صحیح منفی، اعداد صحیح مثبت و صفر یک افراز است؛

$$\mathcal{S} = \{\mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^-, \{۰\}\}.$$

زوج‌های مرتب، حاصل‌ضرب دکارتی

زوج معمولی $\{a, b\}$ مجموعه‌ای با دو عضو است. ترتیب اعضا در یک مجموعه اهمیت ندارد، پس $\{a, b\} = \{b, a\}$. اگر ترتیب قرار گرفتن اعضا مهم باشد، از شی متفاوتی که به آن **زوج مرتب** می‌گویند، استفاده می‌کنیم و آن را با (a, b) نشان می‌دهیم. در این صورت $(a, b) \neq (b, a)$ (مگر آن که $a = b$). در حالت کلی، $(a, b) = (a', b')$ اگر و فقط اگر $a = a'$ و $b = b'$.

برای دو مجموعه A و B، **حاصل‌ضرب دکارتی** $A \times B$ مجموعه تمامی زوج‌های مرتب (a, b) با $a \in A$ و $b \in B$ است:

$$A \times B = \{(a, b) \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\}.$$

سه‌ـ تایی (a, b, c)، چهارـ تایی (a, b, c, d)، و در حالت کلی nـ تایی $(a_۱, a_۲, \dots, a_n)$ نیز به طور مشابه تعریف می‌شوند. همچنین، حاصل‌ضرب دکارتی سه، چهار، و در حالت کلی n مجموعه به صورت

$$A_۱ \times \ldots \times A_n = \{(a_۱, \ldots, a_n) | (a_۱ \in A_۱) \wedge \cdots \wedge (a_n \in A_n)\},$$

تعریف می‌شود. اگر تمامی مجموعه‌ها در حاصل‌ضرب دکارتی یکسان باشند، می‌توانیم از نماد $A^۲ = A \times A$ یا $A^۳ = A \times A \times A$ و غیره استفاده کرد. در حالت کلی:

$$A^n = \overbrace{A \times A \times A \times \ldots \times A}^{n \text{ مرتبه}}.$$

مثالی از حاصل‌ضرب دکارتی دو مجموعه، **صفحه حقیقی** $\mathbb{R}^۲$ است که در آن $\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی است (معمولاً $\mathbb{R}$ را **خط حقیقی** گویند.)

تمرین ۱.۲

۱. ثابت کنید مجموعه تهی منحصر بفرد است.

۲. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر با هم مساوی هستند:

(آ) $A = \{۱, ۲\}$.

(ب) $B = \{۱, ۲, ۳\}$.

C مجموعه تمامی اعداد اول است.

(ج) $D = \left\{d | \exists a, b, c > ۰ (a^d + b^d = c^d)\right\}$.

(د) $E = \{e | e > ۰ \wedge \forall c \in C (e \leq c)\}$.

(ه) $F = \{f | \forall c \in C (f \geq c)\}$.

(و) $G = \left\{g | g \geq ۲ \wedge \forall a, b > ۱ (۴g \neq (a+b)^۲ - (a-b)^۲)\right\}$.

(ز) $H = \left\{h | h > ۰ \wedge h^۳ = h^h\right\}$.

(ح) $I = \{i | i + i = i \times i\}$.

(ط) $J = \left\{j | (j+۱)^۲ = j^۲ + ۲j + ۱\right\}$.

(ی) $K = \left\{k | ۴k > k^۲\right\}$.

(ک) $L = \{l | \exists c \in C (l < c)\}$.

(ل) $M = \left\{m | \exists c \in C (m = c^۲)\right\}$.

(م) $N = \{n | \exists c, d \in C (n = cd)\}$.

(ن) $P = \{p | p, p + ۲ \in C\}$.

۳. با استقراء ثابت کنید اگر $|S| = n$، آنگاه $|\mathcal{P}(S)| = ۲^n - ۱$ زیرمجموعه ناتهی دارد.

۴. برای دو مجموعه A, B ثابت کنید $A \subseteq B$ اگر و فقط اگر $A \cup B = B$، اگر و فقط اگر $A \cap B = A$.

۵. نشان دهید $A \subseteq B$ اگر و فقط اگر $\overline{B} \subseteq \overline{A}$.

۶. برای سه مجموعه دلخواه A، B و C، روابط $A \cup B \subseteq A \cup C$ و $A \cap B \subseteq A \cap C$ برقرار هستند. ثابت کنید $B \subseteq C$.

۷. نشان دهید ممکن است رابطه $A \cap B = A \cap C$ برقرار باشد در حالی که $B \neq C$.

۸. با یک مثال نشان دهید رابطه $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cup C)$ برقرار نیست.

۹. ثابت کنید اگر $A \subseteq B \cup C$ آنگاه $A - B \subseteq C$.

۱۰. برای مجموعه $A = \{۱, ۲\}$، اعضای $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ را بنویسید.

۱۱. ثابت کنید اگر $A \subseteq B$، آنگاه $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

۱۲. برای دو مجموعه دلخواه A و B، اعضای $(A \times B) \cap (B \times A)$ را مشخص کنید. اعضای مجموعه $(A \times B) \cup (B \times A)$ را نیز مشخص کنید. در چه وضعیتی این دو مجموعه مساوی هستند.

۱۳. برای سه مجموعه دلخواه A، B و C، ثابت کنید

$$\begin{aligned} A \times (B \cap C) &= (A \times B) \cap (A \times C) \\ A \times (B \cup C) &= (A \times B) \cup (A \times C). \end{aligned}$$

۱۴. تمامی افرازهای مجموعه $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ را مشخص کنید.

۱۵. زوج مرتب کراتفسکی[۳] x و y را به صورت

$$\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\},$$

تعریف می‌کنند. ثابت کنید $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ اگر و فقط اگر $a = c$ و $b = d$.

۲.۲ تابع

فرض کنید به هر عضو از مجموعه A، برخی از اعضای مجموعه B را نسبت دهیم. به عنوان نمونه، $A = \mathbb{N}$ و $B = \mathbb{Z}$ و به هر عضو $x \in \mathbb{N}$ عضوهایی مانند $y \in \mathbb{Z}$ نسبت دهیم که $y^۲ = x$. این عمل را **تناظر** می‌نامند. اعضای این تناظر را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب به صورت زیر نشان داد.

$$\{(x, y) | x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{Z} \wedge y^۲ = x\} = \{(۰, ۰), (۱, ۱), (۱, -۱), (۴, ۲), (۴, -۲), \ldots\}.$$

تابع یا **نگاشت** f از مجموعه A به مجموعه B که با $f : A \to B$ نمایش داده می‌شود، تناظری است که به هر عضو x از A، دقیقاً یک عضو $y = f(x)$ از B را متناظر می‌کند.

یک تابع با نموداری مانند

$$\begin{array}{c} f : A \to B \\ x \mapsto y \end{array} \quad \text{یا} \quad \begin{array}{c} A \overset{f}{\to} B \\ x \mapsto y \end{array}$$

نشان داده می‌شود. به عنوان نمونه تابع f به صورت

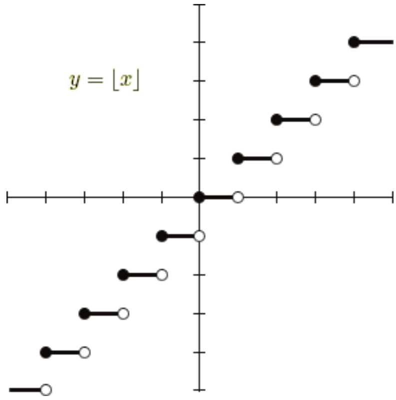
$$\begin{array}{r} f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ x \mapsto ۲x + ۱ \end{array}$$

تابعی را از $\mathbb{Z}$ به $\mathbb{Z}$ با ضابطه $f(x) = ۲x + ۱$ تعریف می‌کند.

اصل موضوعه بسط:
فرض کنید f و g دو تابع هستند. اگر $f = g$، آنگاه برای هر x، $f(x) = g(x)$.

عضو $y = f(x)$ **تصویر** x و x را **پیش‌تصویر** y گویند. به عنوان نمونه اگر $f(x) = ۲x + ۱$، آنگاه $f(۷) = ۲ \times ۷ + ۱ = ۱۵$. مجموعه A **دامنه** f و B را **هم‌دامنه** f گویند. دامنه تابع f را با نماد $\mathrm{dom}\ f$ و هم‌دامنه آن را با $\mathrm{codom}\ f$ نشان می‌دهیم. اگر $A' \subseteq A$، تصویر A' تحت تابع f عبارت است از: $f(A') = \{f(x) \mid x \in A'\}$؛ یعنی زیرمجموعه‌ای از B، شامل تمام تصاویر اعضای A'. زیرمجموعه $f(A)$ از B شامل تمامی تصاویر اعضای A است که **بُرد** f نامیده می‌شود. برد تابع f را با $\mathrm{Ran}\ f$ نشان می‌دهیم. به عنوان نمونه، برد تابع f با ضابطهٔ $f(x) = ۲x + ۱$ که در آن x یک عدد صحیح است ($\mathrm{dom}\ f = \mathbb{Z}$) مجموعه تمامی اعداد صحیحی به شکل $۲x + ۱$، یعنی تمامی اعداد فرد، است.

---
[۳] Kazimierz Kuratowski (1896 – 1980)



شکل ۱.۲: نمودار تابع کف

مثال ۳.۲ دو تابع مفید از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{Z}$ عبارتند از:

۱. تابع **کف** که عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی x را تولید کرده و با نماد $\lfloor x \rfloor$ نشان داده می‌شود. به عنوان نمونه $\lfloor ۲ \rfloor = ۲$، $\lfloor ۲/۳ \rfloor = ۲$، $\lfloor \pi \rfloor = ۳$ و $\lfloor -۲/۵ \rfloor = -۳$ (شکل ۲.۱ را نگاه کنید).

۲. تابع **سقف** که عدد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی x را تولید کرده و با نماد $\lceil x \rceil$ نشان داده می‌شود. به عنوان نمونه $\lceil ۲ \rceil = ۲$، $\lceil ۲/۳ \rceil = ۳$، $\lceil \pi \rceil = ۴$ و $\lceil -۲/۵ \rceil = -۲$ (شکل ۲.۲ را نگاه کنید)

مثال ۴.۲ عملگر **باقیمانده** به صورت $\bmod : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ تابعی است که در آن برای دو عدد صحیح x و y، «$x \bmod y$» باقیمانده تقسیم x بر y را تولید می‌کند.
به عنوان نمونه $۲۳ \bmod ۷ = ۲$، زیرا $۲۳ = ۳ \times ۷ + ۲$. همچنین $۵۹ \bmod ۹ = ۵$، زیرا $۵۹ = ۶ \times ۹ + ۵$.

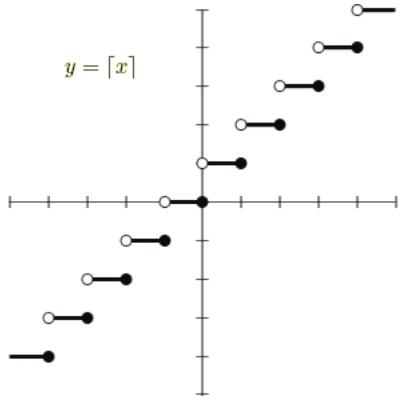
نمودار تابع $f : A \to B$ زیرمجموعه‌ای از $A \times B$ است که به صورت

$$G(f) = \{(x, f(x)) | x \in A, y \in B\},$$

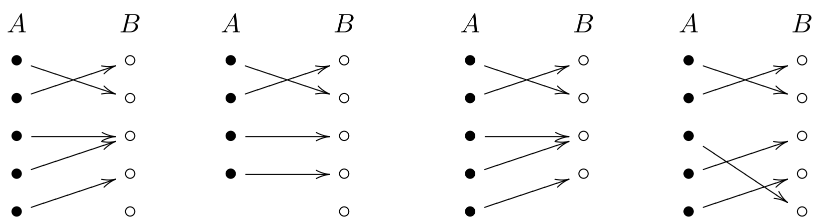
تعریف می‌شود. به عنوان مثال، تابع f از مجموعه اعداد طبیعی به مجموعه اعداد طبیعی با ضابطه $f(n) = n^۲ - ۱$ را در نظر بگیرید. نمودار این تابع به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} G(f) &= \left\{(n, n^۲ - ۱) | n \in \mathbb{N}, n^۲ - ۱ \in \mathbb{N}\right\} \\ &= \{(۱, ۰), (۲, ۳), (۳, ۸), (۴, ۱۵), \ldots\}. \end{aligned}$$

برای تابع $f : A \to B$، فرض کنید $C \subset A$، **تحدید** f به C را با $f|_C$ نشان داده و به صورت $f \cap (C \times B)$ تعریف می‌کنیم:



شکل ۲.۲: نمودار تابع سقف



شکل ۳.۲: مفهوم انواع تابع در نمودار ون

انواع تابع‌ها

۱. **تابع یک به یک** : (شکل ۲.۳ را نگاه کنید) تابع $f : A \to B$ یک به یک یا Injective نامیده می‌شود اگر هر عضو B حداکثر تصویر یک عضو A باشد. به عبارت دیگر،

$$\forall x, x' \in A, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

به عنوان نمونه، تابع $f(x) = ۲x$ از $\mathbb{Z}$ به $\mathbb{Z}$ یک به یک است و به یک عضو از دامنه تابع تنها دو برابر آن را متناظر می‌کند.

۲. **تابع بروی (پوشا)** : (شکل ۲.۳ را نگاه کنید) تابع $f : A \to B$ بروی (پوشا) یا Surjective نامیده می‌شود هرگاه هر عضو B تصویری از یک عضو A باشد. به عبارت دیگر،

$$\forall y \in B, \exists x \in A : y = f(x),$$

به عنوان نمونه، تابع $f(x) = x^۲$ از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}^+ \cup \{۰\}$ پوشا بوده و هر عضو از هم‌دامنه تابع (هر عدد حقیقی نامنفی) تصویری از (حداقل) یک عضو از دامنه تابع (عدد حقیقی) است.

۳. **تناظر یک به یک** یا **دوسویی** : (شکل ۲.۳ را نگاه کنید) تابع $f : A \to B$ تناظر یک به یک یا Bijective گویند هرگاه بروی و یک به یک باشد. به عنوان نمونه، تابع $f(x) = x + ۳$ یک دوسویی از $\mathbb{Z}$ به $\mathbb{Z}$ است و هر عضو از مجموعه اعداد صحیح تنها و تنها یک عدد صحیح متناظر است.

تابع همانی

مجموعه A داده شده است. تابع $I_A : A \to A$ که برای هر x در A با ضابطه $I_A(x) = x$ تعریف می‌شود، **تابع همانی** برای A نامیده می‌شود.

اعمال روی توابع

عمل‌های مختلفی روی تابع‌ها تعریف می‌شود. در ادامه چندین عمل را تعریف می‌کنیم. این عمل‌ها را می‌توان به صورت استقرایی، برای هر تعداد متناهی تابع نیز تعمیم داد.

جمع و ضرب دو تابع:

فرض کنید $f : X \to \mathbb{R}$ و $g : Y \to \mathbb{R}$ دو تابع هستند. جمع و ضرب این دو تابع، به ترتیب با نماد $f + g$ و $f.g$ نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x) \\ (f.g)(x) &= f(x).g(x) \end{aligned}$$

مجموع و حاصل ضرب دو تابع زمانی خوش‌ـتعریف هستند که هر دو تابع f و g تعریف شوند. بنابراین

$$\text{dom }(f+g) = \text{dom }(f.g) = \text{dom }(f) \cap \text{dom }(g).$$

مثال ۵.۲ دو تابع $f(x) = x^۲$ و $g(x) = \sqrt{۱ - x}$ را در نظر بگیرید که در آن

$$\text{dom } f = (-\infty, +\infty), \text{dom } g = (-\infty, ۱].$$

در این صورت

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x) = x^۲ + \sqrt{۱-x} \\ (f.g)(x) &= f(x).g(x) = x^۲\sqrt{۱-x} \end{aligned}$$

چون $\text{dom } f \cap \text{dom } g = (-\infty, ۱]$، بنابراین $f + g$ و $f.g$ تنها زمانی تعریف می‌شوند که $x \leq ۱$ و $\text{dom } f + g = \text{dom } f.g = (-\infty, ۱]$.

تفاضل و تقسیم دو تابع به روش مشابه تعریف می‌شوند.

تفاضل و تقسیم دو تابع:

فرض کنید $f : X \to \mathbb{R}$ و $g : Y \to \mathbb{R}$ دو تابع هستند. تفاضل g از f با نماد $f - g$ نمایش داده می‌شود. همچنین، تقسیم f بر g با نماد f/g نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}(f-g)(x) &= f(x)-g(x)\\ (f/g)(x) &= f(x)/g(x)\end{aligned}$$

مجموع و حاصل ضرب دو تابع زمانی خوش‌ـ تعریف هستند که هر دو تابع f و g تعریف شوند. علاوه بر این، در f/g مقدار $g(x)$ نباید صفر شود. بنابراین

$$\begin{aligned}\operatorname{dom}(f-g) &= \operatorname{dom}(f)\cap\operatorname{dom}(g)\\ \operatorname{dom}(f/g) &= (\operatorname{dom}(f)\cap\operatorname{dom}(g)) - \{x\in\operatorname{dom} g \mid g(x)=۰\}\,.\end{aligned}$$

مثال ۶.۲ دو تابع f و g از مجموعه $A = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ به مجموعه اعداد حقیقی به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\begin{aligned}f &:= \{(۱,۴),(۲,۵),(۳,۲),(۴,۵),(۵,۳)\}\,,\\ g &:= \{(۱,۴),(۲,۲),(۳,۲),(۴,۰),(۵,۲)\}\,.\end{aligned}$$

برای این دو تابع داریم:

$$\begin{aligned}f+g &:= \{(۱,۸),(۲,۷),(۳,۴),(۴,۵),(۵,۵)\}\,,\\ f-g &:= \{(۱,۰),(۲,۳),(۳,۰),(۴,۵),(۵,۱)\}\,,\\ f.g &:= \{(۱,۱۶),(۲,۱۰),(۳,۴),(۴,۰),(۵,۶)\}\,,\\ f/g &:= \{(۱,۱),(۲,۲/۵),(۳,۱),(۵,۱/۵)\}\,.\end{aligned}$$

مثال ۷.۲ چهار مجموعه A، B، C و D را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}A &:= \{۱,۲,۳,۴,۵\}\,,\\ B &:= \{۳,۶,۹,۱۲,۱۵\}\,,\\ C &:= \{۳,۴,۵,۶,۷\}\,,\\ D &:= \{۲,۴,۶,۸,۱۰,۱۲\}\,.\end{aligned}$$

تابع‌های $f : A \to B$ و $g : C \to D$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}f &:= \{(۱,۶),(۲,۳),(۳,۱۲),(۴,۹),(۵,۱۵)\}\,,\\ g &:= \{(۳,۴),(۴,۲),(۵,۱۰),(۶,۸),(۷,۱۲)\}\,.\end{aligned}$$

دامنه و برد تابع‌های $f + g$ و $f.g$ را مشخص کرده و اعضای هر یک از این توابع را بنویسید.

حل : با توجه به تعریف داریم:

$$\mathrm{dom}\ f+g=\mathrm{dom}\ f.g=A\cap B=\{۳,۴,۵\}\,.$$

اعضای این دو تابع عبارتند از:

$$\begin{aligned} f+g &= \{(۳,۱۲+۴),(۴,۹+۲),(۵,۱۵+۱۰)\} \\ &= \{(۳,۱۶),(۴,۱۱),(۵,۲۵)\}\,, \\ f.g &= \{(۳,۱۲\times ۴),(۴,۹\times ۲),(۵,۱۵\times ۱۰)\} \\ &= \{(۳,۴۸),(۴,۱۸),(۵,۱۵۰)\}\,. \end{aligned}$$

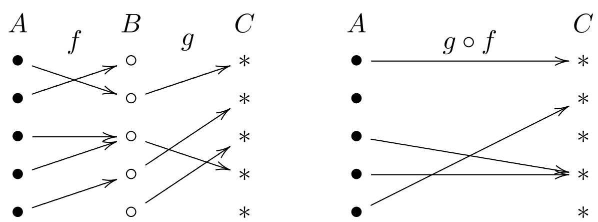
بنابراین، بردهای این توابع عبارتند از:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ran}\ f+g &= \{۱۶,۱۱,۲۵\}\,, \\ \mathrm{Ran}\ f.g &= \{۴۸,۱۸,۱۵۰\}\,. \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که در اینجا مجموع این دو تابع دامنه یکسانی دارند ولی بردهای آنها متفاوت هستند.
$\diamondsuit$

ترکیب تابع‌ها

دو تابع $f:A\to B$ و $g:B\to C$ داده شده‌است. **تابع مرکب** دو تابع f و g برای هر x در A به صورت $g\circ f:A\to C$ با ضابطه $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ تعریف می‌شود. شکل بعدی، ترکیب دو تابع f و g را نمایش می‌دهد. در این شکل ابتدا در سمت چپ هر دو تابع رسم شده‌اند. سپس تابع مرکب $g\circ f$ به طور مستقل در سمت راست نمایش داده شده است.



همچنان که در شکل نیز دیده می‌شود؛ روابط زیر در مورد دامنه و برد تابع مرکب $g\circ f$ برقرار هستند:

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}\ g\circ f &= \{x\in \mathrm{dom}\ f \mid f(x)\in \mathrm{dom}\ g\}\subseteq \mathrm{dom}\ f, \\ \mathrm{Ran}\ g\circ f &= \{y\in \mathrm{Ran}\ g \mid \exists x\in \mathrm{Ran}\ f\cap \mathrm{dom}\ g; g(x)=y\}\subseteq \mathrm{Ran}\ g. \end{aligned}$$

واضح است که ترکیب $g\circ f$ زمانی خوش‌تعریف است که $\mathrm{Ran}\ f\cap \mathrm{dom}\ g\neq\varnothing$.

به عنوان نمونه، اگر $A=B=C=\mathbb{Z}$، $f(x)=x+۱$ و $g(x)=x^۲$ باشد، آنگاه $(g\circ f)(x)=f(x)^۲=(x+۱)^۲$. همچنین $(f\circ g)(x)=g(x)+۱=x^۲+۱$ (ترکیب تابع‌ها در حالت کلی جابجایی نیست). در ادامه به برخی خواص ترکیب توابع اشاره می‌شود:

۱. اگر $f : A \to B$ تابعی از A به B باشد، آنگاه $f \circ I_A = I_B \circ f = f$ که در آنها I_A و I_B به ترتیب تابع‌های همانی روی مجموعه‌های A و B هستند.

۲. ترکیب توابع خاصیت شرکت‌پذیری دارد. یعنی برای سه تابع

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

داریم $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

تکرار تابع . اگر f تابعی از A به A باشد، ترکیب این تابع با خودش معنی‌دار است: $f^{۲} = f \circ f$. به عنوان نمونه اگر $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ با ضابطه $f(x) = ۲x + ۱$ باشد، آنگاه

$$f^{۲}(x) = ۲(۲x + ۱) + ۱ = ۴x + ۳.$$

به طور مشابه $f^{۳} = f \circ f \circ f$ نیز تعریف می‌شود.

تابع معکوس

اگر تابع $f : A \to B$ یک تابع دوسویی باشد، معکوس این تابع عبارت است از

$$f^{-۱} : B \to A$$

به طوری که $f^{-۱}(y) = x$ اگر و فقط اگر $f(x) = y$. به عنوان نمونه اگر $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ با ضابطه $f(x) = x + ۳$ تعریف شود، آنگاه $f^{-۱}(x) = x - ۳$.

نمودار پیکانی تابع معکوس $f^{-۱}$ همان نمودار پیکانی تابع f است و فقط جهت پیکان‌ها عوض می‌شود. خاصیت مشخصه تابع معکوس این است که $f^{-۱} \circ f = I_A$ و $f \circ f^{-۱} = I_B$.

عملگرها

تابعی از $A \times A$ به A را یک **عملگر دودویی** می‌نامند. به عنوان نمونه، جمع دو عدد صحیح یک عملگر دودویی است؛ $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. در نمادگذاری متعارف برای توابع، جمع دو عدد صحیح x و y را با $+(x, y)$ نشان می‌دهند. این نماد را prefix گویند. نماد infix برای نشان دادن یک عملگر دودویی، قراردادن نماد بین دو آرگومان است: $x + y$ (این شیوه نمایش متداول‌تر است). نماد postfix نیز برای نشان دادن یک عملگر دودویی به کار می‌رود. در این صورت نماد را بعد از آرگومان‌ها قرار می‌دهیم و می‌نویسسم: $xy+$. مثال دیگری از عملگر دودویی روی $\mathbb{Z}$، $(x, y) \mapsto x \times y$ است.

عملگر **تکی** روی A، تابعی از A به A است. به عنوان نمونه، تغییر علامت $x \mapsto -x$ در $\mathbb{Z}$ یک عملگر تکی روی $\mathbb{Z}$ است. مثال دیگری از عملگر تکی در $\mathbb{R}^*$ (اعداد حقیقی ناصفر)، $x \mapsto \frac{۱}{x}$ است.

تمرین ۲.۲

۱. توابع f_n از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ با خواص زیر تعریف کنید:

(آ) تابع $f_۱$ دوسویی بوده به طوری که برای هر $x \in \mathbb{N}$، $f_۱(x) \neq x$ ولی

$$f_۱(f_۱(x)) = x$$

(ب) تابع f_2 دو به یک باشد، یعنی برای هر y دقیقاً دو عضو متمایز $x, x' \in \mathbb{N}$ با خاصیت $f_2(x) = f_2(x') = y$ موجودند.

(ج) تابع f_3 بر تمامی چندجمله‌ای‌ها غالب باشد، یعنی برای هر چندجمله‌ای P، xی وجود دارد به طوری که برای هر $y > x$، $f_3(y) > P(y)$.

(د) برای هر $x \in \mathbb{N}$، f_4 در خاصیت $f_4(x+1) = f_4(x) + 2x + 1$ صدق می‌کند.

(ه) تابع f_5 در خاصیت زیر صدق می‌کند:

$$f_5(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \text{ اگر} \\ f_5(x-1) & x > 0 \text{ اگر و مربع نباشد} \\ f_5(x-1) + 1 & x > 0 \text{ اگر و مربع باشد} \end{cases}$$

۲. فرض کنید دو تابع f و g معکوس‌پذیر هستند و معکوس آنها را با f^{-1} و g^{-1} نشان دهید. با ذکر یک مثال نشان دهید

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

درستی این رابطه را در حالت کلی ثابت کنید.

۳. فرض کنید $f : A \to B$ تعریف شده و $A_1, A_2 \subseteq A$ (A_1 و A_2 ناتهی هستند). درستی روابط زیر را ثابت کنید:

(آ) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

(ب) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$. تساوی چه زمانی برقرار است.

(ج) یا درستی رابطه $f(A - B) = f(A) - f(B)$ را ثابت کنید و یا با یک مثال نقض رد کنید. اگر رابطه برقرار نیست، برای برقراری تساوی چه شرطی لازم است؟

۴. ثابت کنید اگر f و g تابع‌های یک به یک باشند آنگاه $f \circ g$ نیز یک به یک است.

۵. فرض کنید $A = \{0, 1, 2\}$ و $F = \{f : A \to A | f = f \circ f\}$. نشان دهید F دقیقاً ده عضو دارد و آنها را مشخص کنید.

۶. فرض کنید $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ با ضابطه $f(n) = 2n + 1$ تعریف شده است. مجموعه‌های $f(\mathbb{N})$، $f^2(\mathbb{N}) = f(f(\mathbb{N}))$ و $f^3(\mathbb{N}) = f(f(f(\mathbb{N})))$ را مشخص کنید. با استقرا روی n، مجموعه $f^n(\mathbb{N})$ را برای هر $n \geq 1$ طبیعی مشخص کنید.

۷. تابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ با ضابطه

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ زوج است} \\ \frac{n-1}{2} & n \text{ فرد است} \end{cases}$$

تعریف شده است. نشان دهید این تابع پوشا است.

۸. تابع‌های $f_1 : A_1 \to B_1$ و $f_2 : A_2 \to B_2$ تعریف شده اند. تابع

$$f = f_1 \times f_2 : A_1 \times A_2 \longrightarrow B_1 \times B_2,$$

را با ضابطه $f(x_۱, x_۲) = (f_۱(x_۱), f_۲(x_۲))$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید اگر تابع‌های $f_۱$ و $f_۲$ پوشا باشند آنگاه تابع f نیز پوشا است. آیا می‌توان ثابت کرد که اگر تابع‌های $f_۱$ و $f_۲$ یک به یک باشند آنگاه f نیز یک به یک است؟ در صورتی که پاسخ مثبت است آن را ثابت کنید؛ در غیر این صورت مثال نقض ارائه کنید.

۹. فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} x + ۲ & \text{اگر } x \leq ۴ \\ x - ۳ & \text{اگر } x > ۴ \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^۲ & \text{اگر } x \leq ۵ \\ ۲x - ۱ & \text{اگر } x > ۵ \end{cases}$$

ضابطه و دامنه توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را مشخص کنید.

۱۰. برای دو تابع

$$\begin{aligned} f &= \{(a, ۴), (b, ۱), (c, ۳), (d, ۳)\} \\ g &= \{(۱, a), (۲, c), (۳, a), (۴, d)\} \end{aligned}$$

دو تابع $g \circ f$ و $f \circ g$ را مشخص کنید.

۱۱. نشان دهید اگر دو تابع f و g پوشا باشند آنگاه ترکیب آنها نیز پوشا است.

۱۲. نشان دهید اگر تابع $g \circ f$ پوشا باشد آنگاه تابع g نیز پوشا است.

۱۳. نشان دهید اگر $f \circ g$ یک تناظر یک به یک باشد آنگاه تابع g یک به یک بوده و تابع f پوشا است.

۳.۲ رابطه‌ها

فرض کنید M مجموعه مردان و W مجموعه زنان هستند که تعدادی از مردان با برخی زنان ازدواج کرده‌اند. می‌خواهیم توصیف کنیم که کدام مرد از مجموعه M با کدام زن از مجموعه W ازدواج کرده‌است. یکی از روش‌ها این است که مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب (m, n) بسازیم که در آن m یک مرد و w یک زن است و m با n ازدواج کرده‌است. پس رابطه «ازدواج کردن با» را می‌توان به صورت زیرمجموعه‌ای از حاصل‌ضرب دکارتی $M \times W$ در نظر گرفت. در حالت کلی **رابطه** $\mathcal{R}$ از مجموعه A به مجموعه B، زیرمجموعه‌ای از حاصل‌ضرب دکارتی $A \times B$ است، یعنی $\mathcal{R} \subseteq A \times B$. اگر $a \in A$ با $b \in B$ رابطه داشته باشد به جای $(a, b) \in \mathcal{R}$ از نماد $a\mathcal{R}b$ استفاده می‌کنیم.

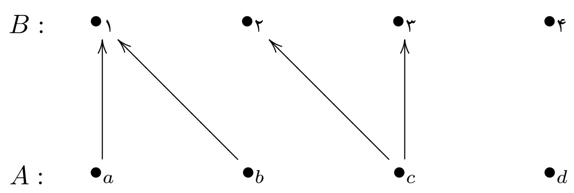
مجموعه

$$\{a \in A \mid a\mathcal{R}b, b \in B \text{ برای برخی }\}$$

دامنه $\mathcal{R}$ نامیده می‌شود و مجموعه

$$\{b \in B \mid a\mathcal{R}b, a \in A \text{ برای برخی }\}$$

را **برد** $\mathcal{R}$ گویند. به عنوان نمونه، دامنه رابطه «ازدواج کردن با»، مجموعه مردان متاهل و برد آن مجموعه زنان متاهل است.



شکل ۴.۲: نمودار یک رابطه

اگر مجموعه‌های A و B یکسان باشند، هر زیرمجموعه $A \times A$ یک **رابطه دودویی** در A است. به عنوان نمونه، فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$. عملگر دودویی «کوچک‌تر از» در A به صورت

$$\begin{aligned} <_A &= \{(x, y) \in A \times A \mid x < y\} \\ &= \{(۱, ۲), (۱, ۳), (۱, ۴), (۲, ۳), (۲, ۴), (۳, ۴)\}, \end{aligned}$$

است.

توجه: معمولاً مجموعه A با رابطه دودویی $\mathcal{R}$ را با نماد $(A, \mathcal{R})$ نشان می‌دهند. به عنوان نمونه $(\mathbb{Z}, \leq)$ به مفهوم مجموعه اعداد صحیح همراه با رابطه «نابرابری نااکید» است.

نمایش رابطه‌ها

نمودار پیکانی. نمودارهای ون و پیکان‌ها را می‌توان برای نمایش رابطه بین مجموعه به کار برد. به عنوان مثال، شکل ۲.۴ نشان دهنده رابطه از مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ به مجموعه $B = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ است که به صورت $\mathcal{R} = \{(a, ۱), (b, ۱), (c, ۲), (c, ۳)\}$ تعریف شده‌است. در این نمودار، پیکان از x به y به این معنی است که x با y رابطه دارد. چنین نمودارهایی را **گراف جهت‌دار** گویند.
مثالی دیگر در شکل ۲.۵ داده شده‌است که نشان دهنده رابطه بخش‌پذیری در مجموعه $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$ است.

ماتریس یک رابطه

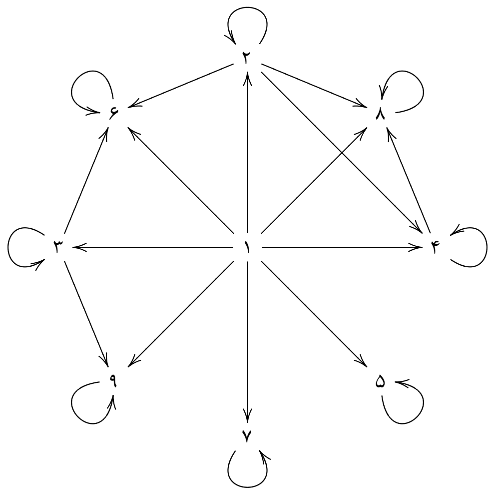
روش دیگر برای نمایش رابطه $\mathcal{R}$ از مجموعه A به B استفاده از ماتریس است. سطرهای این ماتریس را با اعضای A و ستون‌های آن را با اعضای B متناظر می‌کنیم. برای $a \in A$ و $b \in B$، اگر $a\mathcal{R}b$ آنگاه در تلاقی سطر a و ستون b عدد ۱ می‌نویسیم و در غیر این صورت صفر. به عنوان نمونه، رابطه

$$\mathcal{R} = \{(a, ۱), (b, ۱), (c, ۲), (c, ۳)\}$$

از مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ به مجموعه $B = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ به صورت ماتریسی

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

نشان داده می‌شود.



شکل ۵.۲: نمودار رابطه بخش‌پذیری در مجموعه $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$

رابطه معکوس

رابطه $\mathcal{R}$ از A به B داده شده‌است. معکوس $\mathcal{R}$ که با $\mathcal{R}^{-۱}$ نشان داده می‌شود رابطه‌ای است که از B به A به صورت

$$b\mathcal{R}^{-۱}a \Leftrightarrow a\mathcal{R}b,$$

تعریف می‌شود. به عنوان نمونه اگر $\mathcal{R}$ رابطه «فرزند بودن» باشد، آنگاه $\mathcal{R}^{-۱}$ رابطه «والد بودن» است.

ترکیب رابطه‌ها

سه مجموعه A، B و C را در نظر بگیرید. رابطه $\mathcal{R}$ از A به B و رابطه $\mathcal{S}$ از B به C داده شده‌است. ترکیب $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ رابطه‌ای از A به C است که با

$$a(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})c \Leftrightarrow \exists b \in B;\ a\mathcal{R}b,\ b\mathcal{S}c,$$

تعریف می‌شود. به عنوان مثال، اگر $\mathcal{R}$ رابطه «پدر بودن» و $\mathcal{S}$ رابطه «ازدواج کردن با» باشد، آنگاه $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ رابطه «پدرِ همسر بودن» است.

مثال ۸.۲ فرض کنید $A = \{a, b, c\}$، $B = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و $C = \{w, x, y, z\}$. رابطه $\mathcal{R}$ از A به B را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{R} = \{(a, ۱), (a, ۳), (b, ۲)\}.$$

همچنین، رابطه $\mathcal{S}$ از B به C را به صورت

$$\mathcal{S} = \{(۱, x), (۱, y), (۲, w), (۲, z), (۴, y)\},$$

در نظر می‌گیریم. ترکیب $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ عبارت است:

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(a,x),(a,y),(b,w),(b,z)\}\,.$$

آیا ترکیب $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ خوش‌تعریف است؟ چرا؟

خاصیت‌های رابطه‌های دودویی

یک رابطه در A

۱. **بازتابی** است اگر برای هر $x \in A$، $x\mathcal{R}x$. به عنوان نمونه، رابطه «مساوی بودن» ($=$) در $\mathbb{Z}$ بازتابی است.

۲. **تراگذری** است اگر برای هر $x,y,z \in A$، از $x\mathcal{R}y$ و $y\mathcal{R}z$ برقراری $x\mathcal{R}z$ نتیجه شود. به عنوان نمونه، «مساوی بودن» ($=$) و «کوچک‌تر بودن» ($<$) رابطه‌های تراگذری هستند.

۳. **متقارن** است هرگاه از $x,y \in A$ و $x\mathcal{R}y$ برقراری $y\mathcal{R}x$ نتیجه شود. به عنوان نمونه، رابطه «تساوی» ($=$) در $\mathbb{Z}$ متقارن است در حالی که رابطه «کوچک‌تری اکید» ($<$) یک رابطه متقارن نیست.

۴. **پادمتقارن** است هرگاه برای هر $x,y \in A$ از برقراری رابطه‌های $x\mathcal{R}y$ و $y\mathcal{R}x$ برقراری $x = y$ نتیجه شود. به عنوان نمونه رابطه «نابرابری نااکید» ($\leq$) در $\mathbb{Z}$ یک رابطه پادمتقارن است.

ترتیب جزیی

ترتیب جزیی یا به طور خلاصه **ترتیب**[۴] روی مجموعه A، یک رابطه دودویی روی A است که در خواص زیر صدق می‌کند:

۱. **بازتابی** : برای هر $x \in A$، $x \preceq x$.

۲. **پادمتقارن**: $(x \preceq y) \wedge (y \preceq x) \Rightarrow x = y$.

۳. **تراگذری**: $(x \preceq y) \wedge (y \preceq z) \Rightarrow x \preceq z$.

مثال ۹.۲ چند نمونه از رابطه‌های ترتیب عبارتند از:

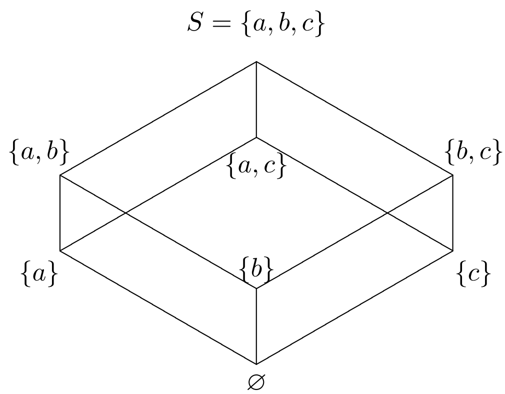
۱. نابرابری نااکید ($\leq$) در $\mathbb{Z}$.

۲. رابطه بخش‌پذیری در $\mathbb{Z}^+$: $a|b \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{Z}^+,\ b = at$.

۳. رابطه زیرمجموعه‌بودن ($\subseteq$) در $\mathcal{P}(A)$ (مجموعه تمام زیرمجموعه‌های A).

دو عضو $a,b \in A$ را **مقایسه‌پذیر** گویند اگر یا $x \preceq y$ و یا $y \preceq x$. در غیر این صورت **مقایسه‌ناپذیر** نامیده می‌شوند. یک ترتیب را **کلی** یا **خطی** گویند هرگاه هر دو عضو $a,b \in A$ مقایسه‌پذیر باشند. به عنوان نمونه $(\mathbb{Z},\leq)$ یک ترتیب کلی است در حالی که $(\mathbb{Z}^+,\ |\ )$ که در آن نماد «|» نشان دهنده بخش‌پذیری اعداد صحیح مثبت است، یک ترتیب کلی نیست. یک زیرمجموعه ترتیب کلی از یک ترتیب جزیی را **زنجیر** گویند. به عنوان مثال مجموعه $\{۱,۲,۴,۸,۱۶,\ldots\}$ در $(\mathbb{Z}^+,\ |\ )$ یک زنجیر است. زیرمجموعه‌ای از یک ترتیب جزیی که هر دو عضو آن غیرقابل مقایسه هستند را **پادزنجیر** گویند.

---
[۴] ترتیب بین دو شی را در حالت کلی با نماد «$\preceq$» نشان می‌دهیم.



شکل ۶.۲: نمودار هاس برای رابطه ترتیب زیرمجموعه بودن

نمودار هاس

هلموت هاس[5] ریاضی‌دان آلمانی بود که در نظریه جبری اعداد کار می‌کرد. **نمودار هاس** نوعی نمودار ریاضی برای نمایش مجموعه‌های مرتب جزیی است. این نام‌گذاری بعد از مرگ هاس به دلیل استفاده موثر او از این نمودارها انجام گرفت. این روش، برای رسم نمودارها با دست طراحی شده بود و در سال‌های اخیر، رسم این نمودارها با استفاده از ابزارهای رسم بسیار ساده‌تر شده است.

در نمودار هاس هر عضو با یک نقطه (گره یا راس نمودار) نشان داده می‌شود. جانشین بلافصل آن با قراردادن یک نقطه در بالای آن و اتصال آن با گره اصلی با یک خط راست نشان داده می‌شود. در شکل ۲.۶ نمونه‌ای از یک نمودار هاس دیده می‌شود که رابطه زیرمجموعه بودن برای مجموعه سه عضوی $\{a, b, c\}$ را نشان می‌دهد.

شکل ۲.۷ نمونه دیگری از نمودار هاس است که رابطه بخش‌پذیری برای مقسوم علیه‌های عدد ۶۰ یعنی مجموعه $\{۱, ۲, ۳, ۵, ۶, ۱۰, ۱۲, ۱۵, ۲۰, ۳۰, ۶۰\}$ را نشان می دهد.

رابطه هم‌ارزی

رابطه هم‌ارزی[6] روی مجموعه A رابطه دودویی روی A با خواص زیر است:

۱. **بازتابی** : برای هر $x \in A$، $x \sim x$.

۲. **متقارن**: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$.

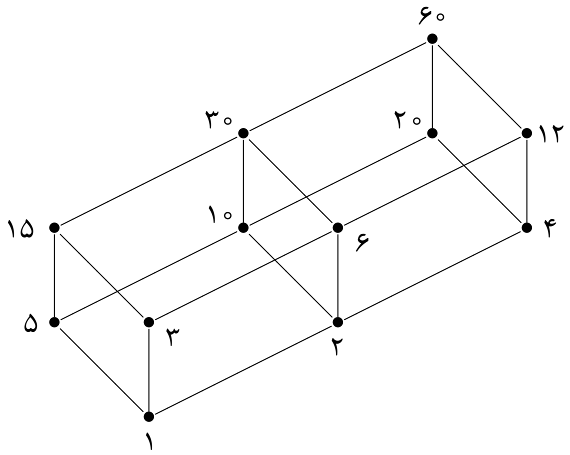
۳. **تراگذری**: $(x \sim y) \wedge (y \sim z) \Rightarrow x \sim z$.

به عنوان نمونه، رابطه «برابری» $(=)$ در $\mathbb{Z}$ یک رابطه هم‌ارزی است. رابطه «همنهشتی به پیمانه ۲» ، نمونه دیگری در $\mathbb{Z}$ است. رابطه «همنهشتی به پیمانه ۲» $x \equiv y \pmod{۲}$ برقرار است اگر و فقط اگر $x - y$ زوج باشد. به عنوان مثال $۶ \equiv ۲ \pmod{۲}$ زیرا $۶ - ۲ = ۴$ زوج است در حالی که $۷ \not\equiv ۴ \pmod{۲}$ زیرا $۷ - ۴ = ۳$ زوج نیست. رابطه همنهشتی با پیمانه ۲، یک رابطه هم‌ارزی است زیرا:

---

[5] Helmut Hasse (1898-1979)

[6] وجود رابطه هم‌ارزی بین دو شی را با نماد «$\sim$» نشان می‌دهیم.



شکل ۷.۲: نمودار هاس برای رابطه بخش‌پذیری مقسوم علیه‌های ۶۰

۱. برای هر عدد صحیح x، $x - x = 0$ زوج است. پس $x \equiv x (\bmod 2)$ (بازتابی).

۲. اگر $x \equiv y (\bmod 2)$ آنگاه $x - y = 2t$ زوج است، ولی $y - x = 2(-t)$ نیز زوج است پس $y \equiv x (\bmod 2)$ (تقارن).

۳. فرض کنید $x \equiv y (\bmod 2)$ و $y \equiv z (\bmod 2)$. در این صورت $x - y = 2t$ و $y - z = 2u$ زوج هستند. پس $x - z = (x - y) + (y - z) = 2(t + u)$ نیز زوج بوده و در نتیجه $x \equiv z (\bmod 2)$ (تراگذری).

کلاس‌های هم‌ارزی، مجموعه خارج قسمت، افرازها

رابطه هم‌ارزی $\sim$ روی مجموعه A و عضو $x \in A$ داده شده‌است. مجموعه تمامی اعضای A که با x رابطه دارند، **کلاس هم‌ارزی** x نامیده و با $[x] = \{y \in A \mid y \sim x\}$ تعریف می‌شود. عضو x را **نماینده** کلاس $[x]$ گویند. گردایه کلاس‌های هم‌ارزی را که با

$$A/_{\sim} = \{[x] \mid x \in A\}$$

نشان می‌دهند، **مجموعه خارج قسمت** A با هم‌ارزی $\sim$ گویند. یکی از خاصیت‌های مهم رابطه هم‌ارزی روی مجموعه‌ای مانند A، مجموعه خارج‌قسمت آن است. گردایه تمامی کلاس‌های هم‌ارزی افرازی از A است. یادآوری می‌کنیم که **افراز** مجموعه A گردایه‌ای مانند $\{A_1, A_2, \ldots\}$ از زیرمجموعه‌های ناتهی A است که دوبه‌دو متمایز بوده و اجتماع آنها با A برابر است.

۱. برای هر $i \neq j$، $A_i \cap A_j = \varnothing$.

۲. $\bigcup_n A_n = A$.

مثال ۱۰.۲ در $\mathbb{Z}$، با رابطه همنهشتی به پیمانه ۲ ($\sim_2$)، دو کلاس هم‌ارزی وجود دارد: مجموعه $\mathbb{E}$ از اعداد صحیح زوج و مجموعه $\mathbb{O}$ از اعداد فرد. مجموعه خارج قسمت $\mathbb{Z}s$ با رابطه همنهشتی به

پیمانه ۲ ($\sim_۲$) برابراست با $\mathbb{Z}/\sim_۲=\{\mathbb{E},\mathbb{O}\}$. این مجموعه خارج قسمت، افرازی از $\mathbb{Z}$ است؛ زیرا $\mathbb{E}\cap\mathbb{O}=\varnothing$ و $\mathbb{E}\cup\mathbb{O}=\mathbb{Z}$.

تمرین ۳.۲

۱. نشان دهید رابطه‌های تعریف شده در مثال ۹.۲، ترتیب جزیی هستند.

۲. آیا رابطه $>$ در $\mathbb{Z}$ یک ترتیب جزیی است؟ چرا؟

۳. نمودار هاس یک ترتیب کلی چگونه است؟

۴. رابطه $\mathcal{R}=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,c)\}$ روی مجموعه $\{a,b,c\}$ تعریف شده است. نشان دهید برای هر $n\geq ۲$، $\mathcal{R}^n=\mathcal{R}$ (از استقرا روی n استفاده کنید).

۵. کلاس‌های هم‌ارزی $\mathbb{Z}$ با رابطه همنهشتی به پیمانه ۳ را بیابید.

۶. فرض کنید m عدد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است. رابطه همنهشتی به پیمانه m روی $\mathbb{Z}$ را به صورت $x\equiv y(\mod m)\Leftrightarrow m|(y-x)$ تعریف کنید (یعنی $y-x$ بر m بخش‌پذیر است). ثابت کنید این رابطه هم‌ارزی است. کلاس‌های هم‌ارزی را تعیین کنید. چند کلاس هم‌ارزی وجود دارد؟

۷. روی حاصل‌ضرب دکارتی $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ رابطه $(a,b)\mathcal{R}(c,d)\Leftrightarrow ad=bc$ را تعریف می‌کنیم. ثابت کنید این رابطه هم‌ارزی است. آیا این رابطه روی $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ نیز هم‌ارزی است.

۸. رابطه‌ای مثال بزنید که تراگذری و متقارن است ولی بازتابی نیست.

۹. مجموعه $A=\{a,b,c,d\}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $\mathcal{R}$ یک رابطه هم‌ارزی روی A است که به صورت زیر تعریف شده است:

$$\mathcal{R}=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a),(c,d),(d,c)\}.$$

همچنین، فرض کنید $f:A\to A$ به صورت زیر تعریف شود:

$$f(a)=b;f(b)=c;f(c)=d;f(d)=a.$$

علاوه بر این فرض کنید E مجموعه تمامی کلاس‌های هم‌ارزی A در رابطه $\mathcal{R}$ است. نشان دهید تابعی مانند $g:E\to E$ وجود ندارد به طوری که برای هر $a\in A$ رابطه $g([a])=[f(a)]$ برقرار باشد.

۱۰. روی مجموعه $\mathbb{R}^۳$ رابطه $(x,y,z)R(x_۱,y_۱,z_۱)$ برقرار است اگر و فقط اگر

$$۲(x-x_۱)+۳(y-y_۱)-(z-z_۱)=۰.$$

ثابت کنید این رابطه، هم‌ارزی است. کلاس‌های هم‌ارزی این رابطه را مشخص کنید:

$$[(x,y,z)]=\{(x_۱,y_۱,z_۱):۲x+۳y-z=۲x_۱+۳y_۱-z_۱\}.$$

۱۱. ترتیب $>$ روی مجموعه X و ترتیب $\prec$ روی Y تعریف شده‌اند. روی مجموعه $X\times Y$ رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$(x,y)\leqq(z,t)\iff x<z \text{ یا } (x=z,y\prec t).$$

آیا این رابطه یک ترتیب جزیی است؟ چرا؟

فصل ۳

اصول شمارش

روش‌های گوناگون شمارش در ریاضیات گسسته نقش اساسی دارند. با مفاهیم اولیه در این مورد آشنایی دارید. در اینجا برای یادآوری به چند مورد با ذکر مثال‌هایی اشاره می‌کنیم.

۱.۳ اصول اولیه

اصل جمع:

اگر یک انتخاب به m روش و انتخابی دیگر به n روش مختلف انجام گیرد و امکان وقوع همزمان هر دو حالت وجود نداشته باشد، آنگاه تعداد حالت‌های مختلف انتخاب اولی یا دومی برابر است با $m+n$.

مثال ۱.۳ تعداد اعداد دو رقمی که مجموع ارقام آنها ۱۲ یا ۱۳ هست، چند است؟

حل : فرض کنید رقم یکان $x_۱$ و رقم دهگان $x_۲$ است. در این صورت، تعداد جواب‌های مساله با تعداد جواب‌های معادلهٔ

$$x_۱ + x_۲ = ۱۲, \tag{۱.۳}$$

و تعداد جواب‌های معادلهٔ

$$x_۱ + x_۲ = ۱۳, \tag{۲.۳}$$

متناظر است که در آنها $x_۱$ و $x_۲$ اعداد صحیح هستند و در شرایط $۹ \leq x_۱ \leq ۰$ و $۹ \leq x_۲ \leq ۱$ صدق می‌کنند. با یک محاسبه ساده، روشن می‌شود که تعداد جواب‌های معادله سیاله (۱.۳)، ۷ است؛ زیرا مجموعه جواب این معادله عبارت است از:

$$\{(۳,۹),\ (۴,۸)\ ,(۵,۷),\ (۶,۶),\ (۷,۵),\ (۸,۴),\ (۹,۳)\}.$$

همچنین، تعداد جواب‌های معادله سیاله (۲.۳)، ۶ است. زیرا مجموعه جواب این معادله به صورت

$$\{(۴,۹),\ (۵,۸),\ (۶,۷),\ (۷,۶),\ (۸,۵),\ (۹,۴)\},$$

است. پس، بنابر اصل جمع تعداد کل حالت‌های مساعد ۱۳ = ۶ + ۷ است. $\diamondsuit$

تعمیم اصل جمع:

اگر پیشامد $A_۱$ به $n_۱$ روش؛ پیشامد $A_۲$ به $n_۲$ روش و ... بالاخره پیشامد A_k به n_k روش تحقق یابد و پیشامدهای A_i و A_j برای $(۱ \leq i, j \leq k)$ به ازای $i \neq j$ متمایز باشند؛ آنگاه تعداد روش‌های مختلفی که یکی از پیشامدهای $A_۱, A_۲, \ldots, A_k$ رخ می‌دهد برابر است با:

$$n_۱ + n_۲ + \cdots + n_k = \sum_{i=۱}^{k} n_i.$$

مثال ۲.۳ تعداد زوج‌های مرتب (x, y) از اعداد صحیح با شرط $x^۲ + y^۲ \leq ۵$ چند است؟

حل : با فرض $x^۲ + y^۲ = k$، $k = ۰, ۱, \ldots, ۵$ و تعریف مجموعه S_k را به صورت

$$S_k = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{Z}, x^۲ + y^۲ = k\},$$

جواب‌ها را به شش دسته تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
S_۰ &= \{(۰, ۰)\} \\
S_۱ &= \{(۱, ۰), (-۱, ۰), (۰, ۱), (۰, -۱)\} \\
S_۲ &= \{(۱, ۱), (۱, -۱), (-۱, ۱), (-۱, -۱)\} \\
S_۳ &= \varnothing \\
S_۴ &= \{(۰, ۲), (۰, -۲), (۲, ۰), (-۲, ۰)\} \\
S_۵ &= \{(۱, ۲), (۱, -۲), (۲, ۱), (۲, -۱), (-۱, ۲), \\
&\qquad (-۱, -۲), (-۲, ۱), (-۲, -۱)\},
\end{aligned}$$

و بنابر تعمیم اصل جمع، تعداد جواب‌ها برابر است با $\sum_{k=۰}^{۵} |S_k| = ۲۱$. $\diamondsuit$

مثال ۳.۳ در نظریه مجموعه‌ها، اگر $A_۱$، $A_۲$، ... و A_k مجموعه‌های دو به دو متمایز باشند، یعنی اگر $A_i \cap A_j = \varnothing$ ، $۱ \leq i, j \leq k$ و $i \neq j$، آنگاه

$$\left| \bigcup_{i=۱}^{k} A_i \right| = \sum_{i=۱}^{k} |A_i|.$$

اصول شمارش ــ اصل ضرب:

اگر انجام انتخابی با دو زیرــانتخاب متوالی همراه باشد به طوری که زیرــانتخاب اول به m روش و زیرــانتخاب دوم به n روش امکان‌پذیر هستند، آنگاه تعداد روش‌های مختلف برای انتخاب اصلی برابر با $m \times n$ است.

مثال ۴.۳ اگر کودکی بتواند فقط دو نوع نقاشی بکشد و تنها سه مداد رنگی با رنگ‌های متمایز داشته باشد، بنا به اصل ضرب می‌تواند $۶ = ۲ \times ۳$ نقاشی مختلف رسم کند. ◊

مثال ۵.۳ با استفاده از دو حرف A و B می‌توان $۱۶ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲$ «کلمه» چهار حرفی ساخت. ◊

تعمیم اصل ضرب:

فرض کنید پیشامد A به k پیشامد $A_۱, A_۲, \ldots, A_k$ افرازپذیر است و پیشامد $A_۱$ به n_1 روش رخ دهد؛ پیشامد $A_۲$ به n_2 روش تحقق یابد و ... بالاخره، پیشامد A_k به n_k روش مقدور شود؛ تعداد روش‌هایی که پیشامد A می‌تواند رخ دهد برابر است با:

$$n_۱ \times n_۲ \times \cdots \times n_k = \prod_{i=۱}^{k} n_i.$$

مثال ۶.۳ در اتاقی سه صندلی وجود دارد و هفت نفر می‌خواهند روی صندلی‌ها نشسته و با هم عکس بگیرند. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

حل : اگر صندلی‌ها را با $c_۱, c_۲, c_۳$ نشان دهیم، در این صورت صندلی $c_۱$ به هفت طریق، صندلی $c_۲$ به شش روش و صندلی $c_۳$ به پنج روش اشغال می‌شوند. بنا بر تعمیم اصل ضرب، تعداد حالت‌های مختلف نشستن هفت نفر روی سه صندلی عبارت است از $۲۱۰ = ۵ \times ۶ \times ۷$. توجه داشته باشید که در این مساله، ترتیب نشستن افراد روی صندلی‌ها مهم است. ◊

مثال ۷.۳ چند عدد نه رقمی وجود دارد؟

حل : برای نوشتن یک عدد ۹ رقمی، انتخاب رقم اول از سمت چپ به ۹ روش و سایر ارقام (هشت رقم بعدی) هر کدام به ۱۰ روش امکان‌پذیر است. اگر از توصیف نموداری استفاده شود، برای هر رقم یک خانه خالی در نظر می‌گیریم و تعداد حالت‌های مجاز برای قرار دادن اعداد در هر خانه را تعیین می‌کنیم.

۱۰ روش	۱۰ روش	۱۰ روش	۱۰ روش	۱۰ روش	۱۰ روش	۱۰ روش	۱۰ روش	۹روش

پس تعداد ارقام نه رقمی ۹×۱۰^۸ است. ◊

مثال ۸.۳ چند عدد نه رقمی بدون ارقام تکراری وجود دارد؟

حل : از استدلالی شبیه مثال ۷.۳ استفاده می‌کنیم.

۲ روش	۳روش	۴روش	۵روش	۶روش	۷روش	۸روش	۹روش	۹روش

بنا بر تعمیم اصل ضرب، تعداد جواب‌ها عبارت است از $۹ \times !۹$. ◊

مثال ۹.۳ برای $M = \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۰۰\}$، مجموعه

$$S = \{(a, b, c) | a, b, c \in M,\ a < b,\ a < c\},$$

چند عضو دارد؟

حل : توجه کنید که a می‌تواند یکی از اعداد $۱, ۲, \ldots, ۹۹$ باشد. حال اگر

$$a = k \in \{۱, ۲, \ldots, ۹۹\},$$

آنگاه حالت‌های ممکن برای انتخاب b و c هر کدام $(۱۰۰ - k)$ است. پس حالت‌های ممکن برای تشکیل (a, b, c) مساوی $(۱۰۰ - k)(۱۰۰ - k)$ است؛ ولی خود k به ۹۹ حالت انتخاب می‌شود. پس

$$\begin{aligned} |S| &= ۹۹^۲ + ۹۸^۲ + \cdots + ۲^۲ + ۱^۲ \\ &= \frac{۱}{۶} \times ۹۹ \times ۱۰۰ \times ۱۹۹ = ۳۲۸۳۵۰. \end{aligned}$$

زیرا،

$$\sum_{k=۱}^{n} k^۲ = \frac{۱}{۶} n(n + ۱)(۲n + ۱).$$

$\diamondsuit$

تمرین ۱.۳

۱. یک کتابخانه چهار کتاب برای والیبال، سه کتاب برای فوتبال و شش کتاب برای تنیس دارد. به چند روش می‌توان سه کتاب ورزشی از کتابخانه امانت گرفت به طوری که از هر نوع کتاب فقط یک جلد انتخاب شود؟

۲. چند عدد چهار رقمی با ارقام بزرگ‌تر از سه وجود دارد؟

۳. با استفاده از ارقام صفر و یک چند دنباله n رقمی ساخته می‌شود؟

۴. بین دو شهر A و B چهار جاده، و بین شهرهای B و C پنج جاده موجود است.

(آ) به چند طریق می‌توان با عبور از شهر B، از شهر A به شهر C رفت؟

(ب) به چند روش می‌توان از شهر A به شهر B و از شهر B به شهر C رفت و دوباره به شهر A برگشت؟

(ج) قسمت قبلی را با شرط آن که مسیر رفت با مسیر برگشت متمایز باشد، حل کنید.

۵. چند عدد هفت رقمی قابل قسمت بر پنج وجود دارد؟

۶. برای شماره‌گذاری اتومبیل‌ها از ترکیب حروف و اعداد به صورت

۱۲۳۴۵	AB

استفاده می‌شود. استفاده از حرف O و رقم صفر مجاز نیست. با توجه به این محدودیت، چند اتومبیل را می‌توان شماره‌گذاری کرد؟

۷. با توجه به اصل ضرب، نتیجه بگیرید که تعداد انتخاب‌های k شیء از یک مجموعه n عضوی از اشیاء $(n \geq k)$ عبارت است از:

$$\frac{n!}{(n-k)!}.$$

۸. تعداد کلمات حداکثر پنج حرفی که می‌توان از حروف الفبای انگلیسی ساخت، چند است؟

۹. با استفاده از ارقام یک تا نه، چند عدد نه رقمی بدون ارقام تکراری و بزرگ‌تر از پانصد میلیون ساخته می‌شود؟

۱۰. با استفاده از ۲۶ حرف الفبای انگلیسی، چند دنبالهٔ ۲۶ حرفی می‌توان ساخت که در آنها حروف صدادار با ترتیب الفبایی قرار داشته باشند؟

۱۱. تعداد مقسوم علیه‌های مثبت ۶۰۰، شامل ۱ و ۶۰۰ را مشخص کنید.

۱۲. نشان دهید تعداد حالت‌های مختلف قرار دادن n فرد در اطراف یک میز $(n-1)!$ است.

۱۳. به چند طریق ۵ پسر و سه دختر می‌توانند دور یک میز بنشینند به شرطی که

(آ) محدودیتی وجود نداشته باشد.

(ب) پسرها و دخترها یک در میان دور میز قرار گیرند ولی پسر B_1 و دختر G_1 کنار هم ننشینند.

(ج) هیچ دو دختر کنار هم ننشینند.

۱۴. چند عدد زوج بدون ارقام تکراری بین ۲۰۰۰۰ و ۷۰۰۰۰ وجود دارد؟

۱۵. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی است که با ارقام ۱، ۳، ۵ و ۷ ساخته شده‌اند که هیچ رقم تکراری ندارند. مجموعه S چند عضو دارد؟ مجموع اعضای S، یعنی $\sum_{n\in S} n$ را بیابید.

۱۶. n زوج می‌خواهند دور یک میز بشینند. تعداد روش‌های مختلف نشستن آنها را در هر یک از حالت‌های زیر تعیین کنید:

(آ) مردان و زنان یک در میان دور میز قرار گیرند.

(ب) هر زن در کنار همسر خود قرار گیرد.

۱۷. چند عدد شش رقمی زوج بدون ارقام تکراری وجود دارد؟

۱۸. فرض کنید A یک مجموعه با $2n$ عضو متمایز با $n \geq 1$ است. تعداد زوج‌های متمایز از اعضای A را بیابید.

۱۹. به چند روش هفت پسر و سه دختر در یک ردیف قرار می‌گیرند به شرط آن که

(آ) هر سه دختر در کنار هم باشند.

(ب) دو مکان نهایی در صف توسط پسران اشغال شده و دختران کنار هم نباشند.

۲.۳ نمونه‌گیری یا انتخاب با تکرار و بدون تکرار و جایگشت‌ها

مجموعه n عضوی $A = \{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$ داده شده است. یک **ترتیب** k عضوی از اعضای A، وقتی **تکرار مجاز باشد**، دنباله‌ای k عضوی از اعضای A است که محدودیتی در انتخاب اعضای این دنباله وجود ندارد. در این صورت، بنا بر اصل ضرب، تعداد روش‌های مختلف انتخاب برابر است با:

$$\underbrace{n \times n \times n \times \cdots \times n}_{k \text{ مرتبه}} = n^k.$$

مثال ۱۰.۳ فرض کنید X یک مجموعه k عضوی و Y مجموعه‌ای n عضوی است. تعداد تابع‌هایی که می‌توان از X به Y نوشت؛ چند است؟

حل : با فرض $X = \{x_۱, x_۲, \ldots, x_k\}$، تابعی مانند f را به صورت زیر می‌سازیم. برای انتخاب $f(x_۱)$، n مقدار مختلف، که همان اعضای Y هستند، وجود دارد. به همین ترتیب، برای مقدار $f(x_i)$، $i = ۱, \ldots, k$ نیز n انتخاب وجود دارد. بنا بر اصل ضرب، تعداد کل تابع‌ها از X به Y برابر با $|Y|^{|X|} = n^k$ است. $\diamondsuit$

دوباره مجموعه n عضوی $A = \{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$ را در نظر بگیرید. هدف ما **انتخاب** k عضو از اعضای A و قرار دادن آنها در یک ردیف است به طوری که برای هر $i \neq j$ داشته باشیم $x_i \neq x_j$ (اعضای انتخاب شده از A **متمایز** هستند). چنین کاری را **نمونه‌گیری بدون تکرار** می‌گویند. در این حالت برای انتخاب اولین عضو n حالت؛ برای انتخاب دومین عضو $n - ۱$ حالت و ... بالاخره برای انتخاب kامین عضو، $n - k + ۱$ حالت مختلف وجود دارد. بنا بر تعمیم اصل ضرب، تعداد کل حالت‌ها عبارت است از:

$$n(n-۱)\cdots(n-k+۱) = \prod_{r=۰}^{k-۱}(n-r).$$

با استفاده از نماد فاکتوریل، تعداد حالت‌ها با $\mathcal{P}(n,k) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ برابر است و در حالت خاص برای $n = k$، $\mathcal{P}(n,n) = \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{۰!} = n!$. در این حالت، هر ترتیب را یک **جایگشت** از n شیء می‌نامند.

مثال ۱۱.۳ تعداد جایگشت‌های یک مجموعه n عضوی $n!$ است.

مثال ۱۲.۳ ده نفر به اسامی $p_۱, p_۲, \ldots, p_{۱۰}$ نام‌گذاری شده‌اند.

۱. به چند روش می‌توانند کنار هم در یک ردیف قرار بگیرند؟

۲. اگر $p_۲, p_۶, p_۹$ بخواهند بدون ترتیب خاصی کنار هم قرار گیرند، تعداد حالت‌های ممکن چند است؟

۳. اگر $p_۲, p_۶, p_۹$ نخواهند کنار هم قرار گیرند، چطور؟

حل : با توجه به اصل ضرب و تعمیم آن داریم:

۱. $۱۰! = ۳۶۲۸۸۰۰$

۲. $3!\,8! = 241920$

۳. $10! - 3!\,8! = 3386880$

$\diamondsuit$

در ادامه بحث، فرض بر این است که ترتیب انتخاب اعضا مهم نبوده و تکرار اعضا نیز مجاز نیست. مجموعهٔ n عضوی $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ داده شده است. **نمونه k عضوی بدون ترتیب** یک زیرمجموعه k عضوی از اعضای A است. به عنوان مثال، با $n = 4$ و $k = 2$، تمامی زیرمجموعه‌های دو عضوی عبارتند از:

$$\{1,2\},\ \{1,3\},\ \{1,4\},\ \{2,3\},\ \{2,4\},\ \{3,4\}.$$

برای به‌دست آوردن فرمولی مناسب، ابتدا فرض کنید k عضو با ترتیب انتخاب شوند. در این صورت تعداد حالت‌های ممکن $\mathcal{P}(n,k) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ است. چون این k عضو می‌توانند $k!$ جایگشت داشته باشند و تغییری در فهرست اعضا حاصل نشود، پس تعداد انتخاب‌های بدون ترتیب برابر است با

$$\frac{n!}{(n-k)!} \times \frac{1}{k!}.$$

این تعداد را **ترکیب** n عضو به k می‌گویند و به صورت زیر نشان می‌دهند:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

به عنوان مثال، یک مجموعه ۱۰ عضوی، تعداد $252 = \dfrac{10!}{5!5!}$ زیرمجموعه ۵ عضوی دارد. همچنین، تیم ۱۱ نفری از یک گروه ۱۷ نفری را می‌توان به تعداد $\dfrac{17!}{11!6!}$ حالت انتخاب کرد.

در ادامه چند کاربرد از روش‌های شمارش را بیان می‌کنیم.

مثال ۱۳.۳ معادله سیّالهٔ $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ چند جواب صحیح نامنفی دارد؟

حل : برای پیدا کردن پاسخ، بین مساله و مرتب کردن توپ‌های رنگی تناظری ایجاد می‌کنیم. فرض کنید k توپ داده شده است و می‌خواهیم آنها را با n رنگ مختلف رنگ‌آمیزی کنیم. فرض کنید x_i، $1 \le i \le n$ نشان‌دهنده تعداد توپ‌های رنگ‌آمیزی شده با رنگ شماره i است. در این صورت برقراری رابطه فوق بدیهی است. به طور هندسی به روش زیر عمل کنید. به تعداد توپ‌های موجود از رنگ شماره ۱، علامت «+» قرار دهید (برای $k = 5$ و $n = 4$ عمل می‌کنیم، مثلاً $x_2 = x_3 = x_4 = 1$ و $x_1 = 2$). در ادامه اگر تغییر رنگی وجود داشته باشد علامت «ـ» قرار دهید. سپس دوباره به تعداد توپ‌های موجود از رنگ شماره ۲، علامت «+» قرار دهید و این روند را تا پایان رنگ شماره n انجام دهید. در این صورت ترتیب زیر به دست می‌آید.

$$+ + - + - + - +$$

در حالت کلی، دنباله‌ای از علامت‌های «+» و «ـ» به دست می‌آید که از k علامت «+» و $n-1$ علامت «ـ» تشکیل شده است. تعداد اعضای این دنباله $k + n - 1$ است.

اگر به جای دو علامت فقط از علامت «+» استفاده کنیم، برای به دست آوردن دنباله‌ای مناسب از علامت‌ها، کافی است $n-۱$ علامت «+» را از میان $k+n-۱$ علامت انتخاب کرده و به علامت «ـ» تبدیل کنیم. تعداد روش‌های مختلف انجام این کار عبارت است از :

$$\binom{k+n-۱}{n-۱} = \frac{(k+n-۱)!}{(n-۱)!k!} = \binom{k+n-۱}{k}.$$

با توجه به وجود تناظر، تعداد جواب‌های مساله نیز مشخص می‌شود. $\diamondsuit$

مثال ۱۴.۳ تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله $x_۱+x_۲+\cdots+x_n=k$ چند است؟

حل : چون $x_i \geq ۱$، پس $x_i - ۱ \geq ۰$. با تغییر متغیر $y_i = x_i - ۱$ و جایگذاری در معادله اصلی داریم:

$$(y_۱+۱)+(y_۲+۱)+\cdots+(y_n+۱)=k,$$

یا

$$y_۱+y_۲+\cdots+y_n=k-n,$$

که در آن $y_i \geq ۰$. بنابر مثال ۱۳.۳، تعداد جواب‌ها برای y_i ها، و به طور متناظر تعداد جواب‌های صحیح و مثبت برای x_i ها عبارت است از:

$$\binom{(k-n)+n-۱}{n-۱} = \binom{k-۱}{n-۱} = \frac{(k-۱)!}{(n-۱)!(k-n)!} = \binom{k-۱}{k-n}.$$

$\diamondsuit$

مثال ۱۵.۳ تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله $x_۱+x_۲+x_۳=۲۰$ چند است؟

حل : بنا بر مثال ۱۴.۳، تعداد جواب‌ها عبارت است از:

$$\binom{۲۰-۱}{۳-۱} = \binom{۱۹}{۲} = \binom{۱۹}{۱۷} = ۱۷۱.$$

$\diamondsuit$

قضیه ۱.۳ *اگر n یک عدد صحیح و مثبت باشد و $(۱+x)^n$ به صورت توان‌هایی از x بسط داده شوند، آنگاه ضریب x^r عبارت است از* $\binom{n}{r}$.

برهان: حاصل‌ضرب زیر را در نظر بگیرید:

$$\underbrace{(۱+x)(۱+x)\cdots(۱+x)}_{n\text{مرتبه}}.$$

جمله x^r در این حاصل ضرب با انتخاب r پرانتز برای متغیر x و $n-r$ پرانتز باقیمانده برای عدد یک و ضرب آنها به دست می‌آید. تعداد حالت‌های مختلف انتخاب r پرانتز از میان n پرانتز عبارت است از $\binom{n}{r}$.

قضیه ۲.۳ (رابطه پاسکال) *برای هر n و r رابطه*

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r},$$

برقرار است.

برهان: می‌دانیم $\binom{n}{r}$ تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از یک مجموعه n عضوی را نشان می‌دهد. این زیرمجموعه می‌تواند شامل عضو nام نیز باشد. اگر عضو nام در این زیرمجموعه باشد، آنگاه $r-1$ عضو باقیمانده این زیرمجموعه از بین $n-1$ عضو دیگر این مجموعه انتخاب می‌شوند و این کار به $\binom{n-1}{r-1}$ حالت مختلف امکان‌پذیر است. اگر عضو nام در این زیرمجموعه نباشد، آنگاه باید همه r عضو زیرمجموعه از بین $n-1$ عضو دیگر این مجموعه انتخاب شوند. در این حالت تعداد انتخاب‌ها $\binom{n-1}{r}$ است. بنا بر اصل جمع حکم برقرار است.

در فصل اول، اثبات بسط دوجمله‌ای با استفاده از استقرا به عنوان تمرین مطرح شده است. در اینجا از استدلال ترکیبیاتی برای نشان دادن برقراری آن استفاده می‌کنیم. مقایسه این دو روش اثبات نشان می‌دهد که استدلال ترکیبیاتی تا چه اندازه می‌تواند برهان را ساده‌تر کند.

قضیه ۳.۳ (بسط نیوتن) *اگر n یک عدد صحیح و مثبت باشد، آنگاه*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n}b^n.$$

برهان: اثبات مانند قضیهٔ ۱.۳ است. کافی است به جای ۱ و x به ترتیب a و b قرار گیرد و از تعمیم اصل جمع به ازای r، $0 \le r \le n$ استفاده شود.

قضیه ۴.۳ *اگر n یک عدد صحیح و مثبت باشد، آنگاه*

$$\begin{aligned}(1-x)^{-n} &= 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n+1}{2}x^2 + \binom{n+2}{3}x^3 + \cdots \\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\binom{n+r-1}{r}x^r.\end{aligned}$$

برهان: حکم را می‌توان از بسط تیلور تابع $f(x) = (1-x)^{-n}$ نتیجه گرفت. در اینجا استدلال ترکیبیاتی ارایه می‌شود. چنانچه قبلاً ملاحظه شد، ترکیب برای اعداد مثبت n تعریف شده است. این تعریف را به صورت زیر برای اعداد منفی تعمیم می‌دهیم.

$$\begin{aligned}\binom{-n}{r} &= \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)}{r!} \\ &= \frac{(-1)^r(n+r-1)!}{(n-1)!r!} = (-1)^r\binom{n+r-1}{r}.\end{aligned}$$

حال از بسط دوجمله‌ای تابع $f(x) = (1-x)^{-n}$ نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}(1-x)^{-n} &= 1 + (-n)(-x) + (-n)(-n-1)\frac{(-x)^2}{2!} + \cdots \\ &= 1 + nx + n(n+1)\frac{x^2}{2!} + \cdots \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} x^r,\end{aligned}$$

زیرا $1 = \binom{n-1}{0}$.

تعریف ۱ : فرض کنید n شی داده شده است که در r دسته $k_1, k_2, \ldots, k_r$ افراز شده‌اند، طوری که اعضای هر دسته از یک نوع و یکسان بوده ولی اعضای دسته‌های متفاوت متمایز هستند. افزون بر این،

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n.$$

در یک جایگشت از n شی، ابتدا محل k_1 شی از دسته اول را مشخص می‌کنیم. تعداد حالت‌های مختلف انتخاب مکان k_1 شی از دسته اول برابر $\binom{n}{k-1}$ است. سپس از $n-k_1$ مکان باقیمانده، محل k_2 شی از دسته دوم را مشخص می‌کنیم. برای این کار تعداد حالت‌های مختلف انتخاب مکان این اشیاء $\binom{n-k_1}{k_2}$ است. اگر استدلال را به همین ترتیب ادامه دهیم، بالاخره k_r مکان باقیمانده برای اشیاء دسته rام باقی مانده است. بنا بر اصل ضرب، تعداد کل حالت‌ها عبارت است از:

$$\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3}\cdots\binom{k_r}{k_r} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}.$$

این تعداد را با نماد $\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r}$ و یا $\mathcal{P}(n; k_1, k_2, \ldots, k_r)$ نشان می‌دهند. ثابت می‌شود که این عدد با ضریب جمله $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_r^{k_r}$ در بسط چندجمله‌ای

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n$$

برابر است.

مثال ۱۶.۳ با ارقام $1, 2, 3$ چند عدد هفت رقمی می‌توان ساخت که تعداد $1, 2, 3$ استفاده شده در این عددها به ترتیب $2, 3, 2$ باشد؟

حل : با توجه به تعریف ۱، تعداد این اعداد عبارت است از:

$$\binom{7}{2, 3, 2} = \frac{7!}{2!3!2!} = 210.$$

$\diamondsuit$

مثال ۱۷.۳ ده توپ را با چهار رنگ مختلف به چند حالت می‌توان رنگ‌آمیزی کرد به طوری که تعداد توپ‌ها از این چهار رنگ به ترتیب $۱, ۲, ۳, ۴$ باشد؟

حل : بنا به تعریف ۱، تعداد روش‌های مختلف رنگ‌آمیزی مورد نظر عبارت است از:

$$\binom{۱۰}{۱, ۲, ۳, ۴} = \frac{۱۰!}{۱!۲!۳!۴!} = ۱۲۶۰۰.$$

$\diamondsuit$

مثال ۱۸.۳ با چهار حرف $\mathrm{i, s, p}$ و m یک دنباله یازده حرفی می‌سازیم. احتمال این که دنباله ساخته شده جایگشتی از کلمهٔ mississippi باشد، چند است؟

حل : تعداد کل دنباله‌های ساخته شدهٔ یازده حرفی با استفاده از چهار حرف $\mathrm{i, s, p}$ و m برابر $۴^{۱۱}$ است. در کلمه mississippi، حرف‌های $\mathrm{p, s, i}$ و m به ترتیب ۴، ۴، ۲ و ۱ بار ظاهر شده‌اند. پس تعداد کل حالت‌های مساعد برابر است با:

$$\binom{۱۱}{۴, ۴, ۲, ۱} = \frac{۱۱!}{۴!۴!۲!۱!} = ۳۴۶۵۰.$$

بنابراین، احتمال مورد نظر برابر است با:

$$p = \frac{۳۴۶۵۰}{۴^{۱۱}} \approx ۰/۰۰۸۳.$$

$\diamondsuit$

تذکر ۱ *عبارت $(x_۱ + x_۲ + \cdots + x_r)^n$ به ازای $r = ۲$ همان دوجمله‌ای نیوتن است. پس برای $r = ۲$ رابطه زیر برقرار است*

$$\binom{n}{k_۱, k_۲} = \binom{n}{k_۱}.$$

تمرین ۲.۳

۱. تعداد جمله‌های بسط چندجمله‌ای $(x_۱ + x_۲ + \cdots + x_r)^n$ را بیابید.

۲. ضریب $a^۳b^۴c^۶$ و $a^۴b^۴c^۶$ را در بسط $(۲a - ۳b + ۴c)^{۱۵}$ محاسبه کنید.

۳. نشان دهید که جمله میانی در بسط $(۱ + n)^{۲n}$ به صورت

$$\frac{۱ \times ۳ \times ۵ \times ۷ \times \cdots \times (۲n - ۱)}{n!} ۲^n x^n,$$

است.

۴. اگر P مجموع جملات زوج و Q مجموع جملات فرد در بسط $(x + y)^n$ باشد، ثابت کنید روابط زیر برقرار هستند.

(آ) $P^۲ - Q^۲ = (x^۲ - y^۲)^n$.

(ب) $۴PQ = (x + y)^{۲n} - (x - y)^{۲n}$.

(ج) $\text{۲}(P^{\text{۲}}+Q^{\text{۲}})=(x+y)^{\text{۲}n}+(x-y)^{\text{۲}n}$.

۵. سه جمله اول بسط $(\text{۱}+ax)^n$ عبارت است از $\text{۱}+\text{۴}x+\text{۷}x^{\text{۲}}$، مقدار a و n را مشخص کنید.

۶. نشان دهید روابط زیر برقرار هستند.

(آ)

$$\binom{n}{\text{۰}}+\binom{n}{\text{۱}}+\cdots+\binom{n}{n}=\text{۲}^n.$$

(ب)

$$\binom{n}{\text{۰}}-\binom{n}{\text{۱}}+\cdots+(-\text{۱})^n\binom{n}{n}=\text{۰}.$$

(ج)

$$\binom{n}{\text{۰}}+\binom{n}{\text{۲}}+\binom{n}{\text{۴}}+\cdots=\binom{n}{\text{۱}}+\binom{n}{\text{۳}}+\binom{n}{\text{۵}}+\cdots=\text{۲}^{n-\text{۱}}.$$

۷. با استفاده از رابطهٔ $(\text{۱}+x)^{\text{۲}n}=(\text{۱}+x)^n(\text{۱}+x)^n$ و در نظر گرفتن ضریب x^n در طرفین این اتحاد، نشان دهید:

$$\binom{\text{۲}n}{n}=\binom{n}{\text{۰}}^{\text{۲}}+\binom{n}{\text{۱}}^{\text{۲}}+\cdots+\binom{n}{n}^{\text{۲}}.$$

۸. نشان دهید:

$$\frac{(\text{۲}n-\text{۱})!}{((n-\text{۱})!)^{\text{۲}}}=\binom{n}{\text{۱}}^{\text{۲}}+\text{۲}\binom{n}{\text{۲}}^{\text{۲}}+\cdots+n\binom{n}{n}^{\text{۲}}.$$

۹. بدون استفاده از بسط دوجمله‌ای و تنها با استفاده از استدلال ترکیبیاتی، درستی رابطه تمرین ۷ را نشان دهید.

۱۰. درستی تساوی

$$\binom{n}{\text{۰}}+\binom{n+\text{۱}}{\text{۱}}+\binom{n+\text{۲}}{\text{۲}}+\cdots+\binom{n+m}{m}=\binom{n+m+\text{۱}}{m},$$

را نشان دهید.

۱۱. از تعریف مستقیم ترکیب استفاده کنید و نشان دهید برای هر n و k مثبت رابطه زیر برقرار است:

$$\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-\text{۱}}{k-\text{۱}}=\frac{n-k+\text{۱}}{k}\binom{n}{k-\text{۱}}.$$

۱۲. تمرین ۱۱ را با استدلال ترکیبیاتی ثابت کنید.

۱۳. تمرین ۱۱ را با استفاده از بسط دو جمله‌ای پاسخ دهید.

۱۴. نشان دهید رابطه

$$\binom{n+۱}{۳} - \binom{n-۱}{۳} = (n-۱)^۲,$$

برای هر $n \geq ۱$ برقرار است.

۱۵. بدون استفاده از رابطه پاسکال و با استدلال ترکیبیاتی، درستی رابطه زیر را نشان دهید:

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+۱}{m+۱}.$$

۱۶. درستی رابطه زیر را نشان دهید:

$$\binom{n-۱}{k} = \binom{n}{k} - \binom{n}{k-۱} + \cdots + (-۱)^k \binom{n}{۰} = \sum_{j=۰}^{k} (-۱)^{k-j} \binom{n}{j}.$$

راهنمایی: از رابطه پاسکال استفاده کنید.

۱۷. با فرض $r < m$ رابطه

$$(۱-x)^m (۱-x)^{-(r+۱)} = (۱-x)^{m-r-۱},$$

را در نظر بگیرید. عبارت‌های سمت چپ را بسط دهید. ضریب x^{m-r} در سمت چپ صفر است (چرا؟). نشان دهید این ضریب به صورت

$$\binom{m}{m-r}\binom{m}{۰} - \binom{m-۱}{m-r-۱}\binom{m}{۱} + \binom{m-۲}{m-r-۲}\binom{m}{۰} - \cdots,$$

است و در نتیجه رابطه

$$\sum_{s=r}^{m} (-۱)^{m-s} \binom{m}{s}\binom{s}{r} = ۰,$$

برقرار است.

۱۸. چند جمله اول بسط $(۱-x)^{-\frac{۱}{۲}}$ را بنویسید و نشان دهید ضریب x^k در این بسط به صورت $\frac{۱}{۴}\binom{۲k}{k}$ است.

۱۹. با استفاده از تساوی $(۱-x)^{-۱} = (۱-x)^{-\frac{۱}{۲}}(۱-x)^{-\frac{۱}{۲}}$ و مساله ۱۸ و مساوی قرار دادن ضریب x^k در طرفین این تساوی نشان دهید رابطه

$$\binom{۲k}{k} + \binom{۲k-۲}{k-۱}\binom{۲}{۱} + \binom{۲k-۴}{k-۲}\binom{۴}{۲} + \cdots + \binom{۲k}{k} = ۴^k,$$

برقرار است.

۲۰. تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌های

(آ) $x+y+z=۱۸$،

(ب) $x+y+x+w=۱۸$،

را مشخص کنید.

۲۱. ثابت کنید برای هر $r<n$ رابطه

$$\binom{n}{r}^{۲} > \binom{n}{r-۱}\binom{n}{r+۱},$$

برقرار است.

۲۲. مقدار عبارت‌های زیر را محاسبه کرده و به ساده‌ترین شکل ممکن بنویسید.

(آ) $\sum_{k=۱}^{n} k\binom{n}{k}$.

(ب) $\sum_{k=۱}^{n}(-۱)^{k-۱}k\binom{n}{k}$.

(ج) $\sum_{k=\circ}^{n}\frac{۱}{k+۱}\binom{n}{k}$.

۲۳. درستی روابط زیر را ثابت کنید:

(آ)

$$\binom{n}{\circ}+۲\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+۲\binom{n}{۳}+\binom{n}{۴}+۲\binom{n}{۵}+\cdots=۳\times۲^{n-۱}.$$

(ب)

$$\frac{\binom{n}{۱}}{\binom{n}{\circ}}+\frac{۲\binom{n}{۲}}{\binom{n}{۱}}+\frac{۳\binom{n}{۳}}{\binom{n}{۲}}+\cdots+\frac{n\binom{n}{n}}{\binom{n}{n-۱}}=\frac{۱}{۲}n(n+۱).$$

(ج)

$$\binom{n}{\circ}-\frac{۱}{۲}\binom{n}{۱}+\frac{۱}{۳}\binom{n}{۲}-\frac{۱}{۴}\binom{n}{۳}+\cdots+\frac{(-۱)^n}{n+۱}\binom{n}{n}=\frac{۱}{n+۱}.$$

(د)

$$\binom{n}{\circ}+۳\binom{n}{۱}+۵\binom{n}{۲}+۷\binom{n}{۳}+\cdots=۲^n(n+۱).$$

(ه)

$$\binom{n}{\circ}\binom{n}{۱}+\binom{n}{۱}\binom{n}{۲}+\cdots+\binom{n}{n-۱}\binom{n}{n}=\frac{(۲n)!}{(n-۱)!(n+۱)!}.$$

(و)

$$\binom{n}{0}\binom{n}{r}+\binom{n}{1}\binom{n}{r+1}+\cdots+\binom{n}{n-r}\binom{n}{n}=\frac{(2n)!}{(n-r)!(n+r)!}.$$

(ز)

$$2\binom{n}{0}+\frac{2^2}{2}\binom{n}{1}+\frac{2^3}{3}\binom{n}{2}+\frac{2^4}{4}\binom{n}{3}+\cdots=\frac{3^{n+1}-1}{n+1}.$$

۲۴. نشان دهید با شرط $0 \leq s \leq k \leq r \leq n$، رابطهٔ

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k}\binom{k}{s}=\binom{n}{s}\binom{n-s}{k-s}\binom{n-k}{r-k},$$

برقرار است.

۲۵. تعداد جواب‌های صحیح معادله $x+y+x+w=50$ که در آن $3<x$، $-4<y$، $0<z$ و $-6<w$ را بیابید.

۲۶. به چند روش می‌توان n توپ را در r جعبه قرار داد به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد؟

۲۷. فاصله بین دو دنباله دودویی به طول n را به صورت تفاوت ارقام در مکان‌های اعضای دو دنباله در نظر بگیرید. مثلاً اگر $x=110110$ و $y=011110$، آنگاه $d(x,y)=2$. دنباله‌ای به طول n داده شده است. تعداد دنباله‌هایی به فاصله $\bar{d}$ از آن را تعیین کنید. تعداد دنباله‌هایی به فاصله حداکثر $\bar{d}$ از آن را بیابید.

۲۸. نشان دهید:

$$\mathcal{P}(m+n,r)=\sum_{k=0}^{r}\mathcal{P}(m,k)\mathcal{P}(n,r-k).$$

(راهنمایی: مجموعه‌ای شامل m توپ سیاه و n توپ سفید را در نظر بگیرید و توجه کنید که اگر از این مجموعه r توپ انتخاب شود، k توپ سیاه و $r-k$ توپ سفید است.) سپس نتیجه بگیرید :

$$\binom{m+n}{m}=\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\binom{m+n-r}{m-k},$$

که در آن $r \leq m+n$.

۲۹. با استقرا ثابت کنید برای هر عدد صحیح $n \geq 1$،

$$\binom{2n}{n}<\frac{4^n}{\sqrt{3n+1}}.$$

۳۰. ده خانواده با شش فرزند را در نظر بگیرید. با فرض این که هر خانواده بیش از یک فرزند ندارد، تعداد حالت‌هایی که این فرزندان به خانواده‌ها تعلق دارند چند است؟

۳۱. ثابت کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$، حاصل ضرب $(n+۱)(n+۲)\cdots(۲n)$ بر ۲^n بخش‌پذیر است.

۳۲. مقدار r را چنان بیابید که در رابطه

$$\frac{۱}{\binom{۹}{r}} - \frac{۱}{\binom{۱۰}{r}} = \frac{۱۱}{۶\binom{۹}{r}},$$

صدق کند.

۳۳. ثابت کنید برای هر $n, r \in \mathbb{N}$، حاصل ضرب $(n+۱)(n+۲)\cdots(n+r)$ بر $r!$ بخش‌پذیر است.

۳۴. با استدلال ترکیبیاتی نشان دهید که در هر یک از حالت‌های زیر، حاصل یک عدد صحیح است.

(آ) $(۳n)!/(۲^n۳^n)$.

(ب) $(۶n)!/(۵^n۳^{۲n}۲^{۴n})$.

(ج) $(n^۲)!/(n!)^n$.

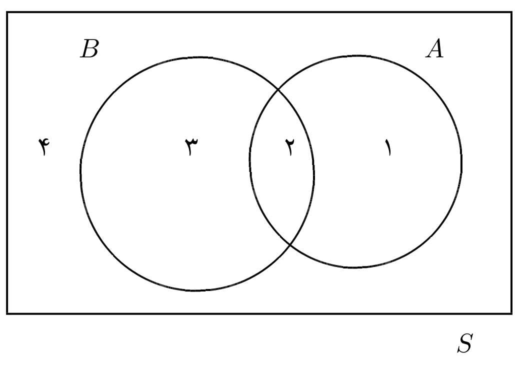
(د) $(n!)!/(n!)^{(n-۱)!}$.

۳.۳ اصل شمول و طرد

موضوع را با مثالی آغاز می‌کنیم تا با شیوه شمارشی که در این بخش ارایه می‌شود آشنا شوید. برای مشخص کردن جواب مساله‌هایی از این نوع، به ریاضیات پیشرفته نیازی نیست.

مثال ۱۹.۳ در یک سالن ۱۰۰ نفر جمع شده‌اند که از آنها ۶۰ نفر مرد، ۳۰ نفر جوان و ۱۰ نفر مرد جوان هستند. چند نفر زن مسن در این سالن وجود دارند؟

حل : فرض کنید S مجموعه تمامی افراد موجود در این سالن است. مجموعه S را مجموعه **مرجع** می‌نامند. مجموعه مردان را با A و مجموعه جوانان را با B نشان دهید و نمودار ون را برای این مساله رسم کنید.



در این نمودار مجموعه S به چهار ناحیهٔ مجزا تفکیک شده است که با شماره‌های ۱, ۲, ۳, ۴ نشان داده شده‌اند.

$$\begin{aligned} \text{ناحیه ۱} &= A \cap \overline{B} = A - B, \\ \text{ناحیه ۳} &= B \cap \overline{A} = B - A, \\ \text{ناحیه ۲} &= A \cap B, \\ \text{ناحیه ۴} &= \overline{A} \cap \overline{B}. \end{aligned}$$

هدف مساله، یافتن تعداد نفرات موجود در ناحیه چهارم است. بهترین روش، شمارش افراد این ناحیه است. این کار را می‌توان با جمع کردن تعداد نفرات A و B شروع کرد (اصل جمع). یعنی احتمالاً

$$|A \cup B| \stackrel{?}{=} |A| + |B|.$$

ولی آیا واقعاً تساوی برقرار است؟ افرادی وجود دارند که هم در مجموعه A و هم در مجموعه B قرار دارند و «دوبار» شمارش شده‌اند [**شمول**] و برای نتیجه‌گیری درست، این تعداد باید از مجموع نهایی کسر شوند [**طرد**]. پس داریم:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

بنابراین

$$|A \cup B| = ۶۰ + ۳۰ - ۱۰ = ۸۰,$$

و در نتیجه تعداد اعضای $\overline{A} \cap \overline{B}$ از رابطه

$$|\overline{A} \cap \overline{B}| = |S| - |A \cup B| = ۱۰۰ - ۸۰ = ۲۰,$$

مشخص می‌شود. $\diamondsuit$

اصل شمول و طرد (شکل اول):

اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، داریم:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

هرگاه $A \cap B = \varnothing$، آنگاه اصل شمول و طرد، به اصل جمع تبدیل می‌شود.

اصل شمول و طرد (شکل دوم):

اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، داریم:

$$|\overline{A} \cap \overline{B}| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B|.$$

توصیف مفید دیگر برای اصل شمول و طرد به صورت زیر است. فرض کنید اعضای مجموعه S یک یا دو خاصیت دارند (و شاید هیچکدام). مجموعه A را نشان دهنده زیرمجموعه‌ای از S با خاصیت اول و مجموعه B را نشان‌دهنده زیرمجموعه‌ای از اعضای S با خاصیت دوم در نظر بگیرید. آنگاه شکل سوم اصل شمول و طرد به صورت زیر است.

اصل شمول و طرد (شکل سوم):

تعداد اعضایی از مجموعه S که در هیچ یک از دو خاصیت صدق نمی‌کنند برابر است با تعداد اعضای S منهای تعداد اعضای S با خاصیت اول، منهای تعداد اعضای S با خاصیت دوم، بعلاوه تعداد اعضای S که هر دو خاصیت را دارند.
اگر تعداد اعضای S که خاصیت r را دارند با $\mathcal{N}(c_r)$ و تعدادی که فاقد این خاصیت هستند با $\mathcal{N}(\bar{c}_r)$ نشان دهیم، آنگاه

$$\mathcal{N}(\bar{c}_1, \bar{c}_2) = \mathcal{N}(S) - \mathcal{N}(c_1) - \mathcal{N}(c_2) + \mathcal{N}(c_1, c_2).$$

مثال ۲۰.۳ دوباره مثال ۱۹.۳ را در نظر بگیرید. فرض کنید در بین افراد موجود در سالن، ۴۰ نفر والیبال بازی می‌کنند که در بین آنها ۲۰ نفر مرد هستند و ۱۵ نفر نیز بازیکن جوان هستند. همچنین در میان بازیکنان ۵ مرد جوان نیز وجود دارند. در سالن چند نفر زن مسن وجود دارند که والیبال بازی نمی‌کنند.

حل : در این مساله سه خاصیت جنسیت، جوان بودن و بازی کردن والیبال مطرح است و فرمول بیان شده در شکل سوم اصل شمول و طرد جوابگو نیست. ابتدا تقریب

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|,$$

به دست می‌آید. امّا این رابطه هنوز درست نیست! زیرا ناحیه ۷ در شکل ۳.۱، یعنی $A \cap B \cap C$ سه بار شامل و سه بار طرد شده است. پس بار دیگر باید شامل شود. یعنی

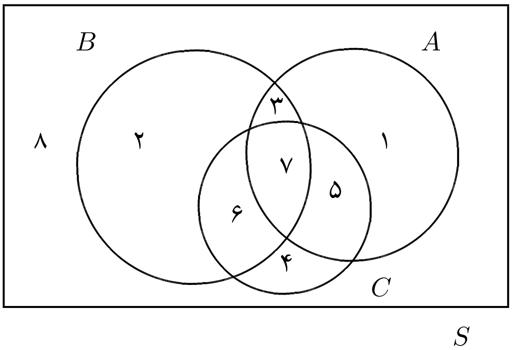
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|,$$

و این فرمول برای محاسبه $|A \cup B \cup C|$ صحیح است.
حال اگر مجموعه مردان را با A، مجموعه جوانان را با B و مجموعه بازیکنان والیبال را با C نشان دهیم، تعداد افرادی که مرد یا جوان یا بازیکن والیبال هستند برابر با

$$۶۰ + ۳۰ + ۴۰ - ۱۰ - ۲۰ - ۱۵ + ۵ = ۹۰,$$

است و جواب مساله $۱۰۰ - ۹۰ = ۱۰$ است. $\diamondsuit$
با توجه به آنچه در مثال‌های ۱۹.۳ و ۲۰.۳ گفته شد، اصل شمول و طرد را می‌توان برای p خاصیت تعمیم داد. قضیه بعدی فرمول متناظر را بیان می‌کند.

قضیه ۵.۳ (اصل شمول و طرد) *اگر مجموعه S، n عضو داشته باشد و برای هر $۱ \leq i \leq p$، خواص c_i مشخص شود به طوری که بعضی از اعضای این مجموعه در تعدادی از این خاصیت‌ها صدق می‌کنند و تعدادی از اعضای آن ممکن است در هیچ خاصیتی صدق نکنند. تعداد اعضایی از S که در شرایط $c_۱, c_۲, \ldots, c_r$ صدق می‌کنند با $\mathcal{N}(c_۱, c_۲, \ldots, c_r)$ مشخص می‌شود و تعداد اعضایی از S*



شکل ۱.۳: ناحیه‌های قرار گرفتن اعضا، وقتی در برخی از سه خاصیت صدق کنند.

که در شرایط $c_1, c_2, \dots, c_r$ صادق نیستند با نماد $\mathcal{N}(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_r)$ نمایش می‌یابد و بالاخره، تعداد اعضایی که در هیچ شرطی صدق نمی‌کنند با نماد

$$\overline{\mathcal{N}} = \mathcal{N}(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_p)$$

معین می‌شود. در این صورت

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{N}} \quad = \quad & \mathcal{N} - (\mathcal{N}(c_1) + \mathcal{N}(c_2) + \cdots + \mathcal{N}(c_p)) \\
& + (\mathcal{N}(c_1, c_2) + \mathcal{N}(c_1, c_3) + \cdots + \mathcal{N}(c_{p-1}, c_p)) \\
& - (\mathcal{N}(c_1, c_2, c_3) + \mathcal{N}(c_1, c_2, c_4) + \cdots + \mathcal{N}(c_{p-2}, c_{p-1}, c_p)) \\
& + \cdots + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le p} (-1)^r \mathcal{N}(c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_r}) + \cdots \\
& + (-1)^p \mathcal{N}(c_1, c_2, \dots, c_p)
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{N}} \quad = \quad & \mathcal{N} - \sum_{1 \le i \le p} \mathcal{N}(c_i) + \sum_{1 \le i < j \le p} \mathcal{N}(c_i, c_j) - \sum_{1 \le i < j < k \le p} \mathcal{N}(c_i, c_j, c_k) \\
& + \cdots + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le p} (-1)^r \mathcal{N}(c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_r}) + \cdots \qquad (۳.۳) \\
& + (-1)^p \mathcal{N}(c_1, c_2, \dots, c_p)
\end{aligned}$$

به طور خلاصه، با قرار دادن

$$S_r = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le p} \mathcal{N}(c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_r}),$$

رابطه (۳.۳) به صورت

$$\overline{\mathcal{N}} = S_0 - S_1 + S_2 - \cdots + (-1)^n S_n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r S_r,$$

نوشته می‌شود.

برهان: اثبات قضیه با استفاده از استقراء بدیهی است و به عنوان تمرین واگذار می‌شود. در اینجا از استدلال ترکیبیاتی استفاده می‌کنیم. نشان می‌دهیم که به ازای هر $x \in S$، تعداد دفعات حضور x در طرفین رابطه (۳.۳) مساوی است و این تعداد صفر یا یک است.

- اگر x در هیچ یک از خواص $c_1, c_2, \ldots, c_p$ صدق نکند، آنگاه فقط یک بار در $\mathcal{N}$ و یک بار در $\overline{\mathcal{N}}$ شمارش می‌شود و در هیچ‌کدام از جملات دیگر رابطه (۳.۳) ظاهر نمی‌شود. پس، x در طرفین این رابطه فقط یک بار ظاهر می‌شود.
- اگر x دقیقاً در r خاصیت، $1 \leq r \leq p$ صدق کند، بدیهی است که x در $\overline{\mathcal{N}}$ شمارش نشده است، در حالی که در طرف راست رابطه (۳.۳) به تعدادی به شرح ذیل حضور دارد:

۱. یک بار در $\mathcal{N}$.

۲. به تعداد r مرتبه در $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \mathcal{N}(c_i)$ دیده می‌شود. زیرا در هر شرط از r شرط یک بار ظاهر می‌شود.

۳. به تعداد $\displaystyle\binom{r}{2}$ بار در $\displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq p} \mathcal{N}(c_i, c_j)$ وجود دارد. زیرا یک بار در هر دو شرط انتخابی از میان r شرط ظاهر می‌شود.

۴. به تعداد $\displaystyle\binom{r}{3}$ بار در $\displaystyle\sum_{1 \leq i < j < k \leq p} \mathcal{N}(c_i, c_j, c_k)$ وجود دارد. زیرا یک بار در هر سه شرط انتخابی از میان r شرط ظاهر می‌شود.

۵. نهایتاً به تعداد $\displaystyle\binom{r}{r}$ بار در $\sum \mathcal{N}(c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_p})$، وقتی که مجموع بر حسب هر انتخاب r تایی از p شرط منظور گردد، ظاهر می‌شود.

در نتیجه، تعداد دفعات حضور x در سمت راست رابطهٔ (۳.۳) به صورت

$$1 - r + \binom{r}{2} - \binom{r}{3} + \cdots + (-1)^n \binom{r}{r} = 0,$$

است.

به این صورت، قضیه ثابت می‌شود.

نتیجه ۱ *با توجه به شرایط قضیه ۳.۵، تعدادی از اعضای S که حداقل در یکی از شرایط c_i، $i \leq$ $i \leq p$ صدق کنند برابر است با $\mathcal{N} - \overline{\mathcal{N}}$.*

مثال ۲۱.۳ تعداد اعداد صحیح و مثبت n، $1 \leq n \leq 100$ که بر ۲، ۵ یا ۷ بخش‌پذیر نباشند، چند است؟

حل : در اینجا $S = \{1, 2, \ldots, 100\}$ است و بنابراین $|S| = 100$. برای هر $n \in S$ خاصیت‌های زیر را تعریف می‌کنیم:

۱. بخش‌پذیر بودن بر ۲ که آن را با c_1 نشان می‌دهیم.

۲. بخش‌پذیر بودن بر ۵ که آن را با $c_۲$ نشان می‌دهیم.

۳. بخش‌پذیر بودن بر ۷ که آن را با $c_۳$ نشان می‌دهیم.

جواب مساله $\overline{\mathcal{N}} = \mathcal{N}(\bar{c}_۱, \bar{c}_۲, \bar{c}_۳)$ است. با توجه به تعریف تابع کف می‌توان نوشت:

$$\mathcal{N}(c_۱) = \lfloor \frac{۱۰۰}{۲} \rfloor = ۵۰, \qquad \mathcal{N}(c_۱, c_۲) = \lfloor \frac{۱۰۰}{۱۰} \rfloor = ۱۰,$$

$$\mathcal{N}(c_۲) = \lfloor \frac{۱۰۰}{۵} \rfloor = ۲۰, \qquad \mathcal{N}(c_۱, c_۳) = \lfloor \frac{۱۰۰}{۱۴} \rfloor = ۷,$$

$$\mathcal{N}(c_۳) = \lfloor \frac{۱۰۰}{۷} \rfloor = ۱۴, \qquad \mathcal{N}(c_۲, c_۳) = \lfloor \frac{۱۰۰}{۳۵} \rfloor = ۲,$$

$$\mathcal{N}(c_۱, c_۲, c_۳) = \lfloor \frac{۱۰۰}{۷۰} \rfloor = ۱,$$

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{N}} = \mathcal{N}(\bar{c}_۱, \bar{c}_۲, \bar{c}_۳) &= \mathcal{N} - (\mathcal{N}(c_۱) + \mathcal{N}(c_۲) + \mathcal{N}(c_۳)) \\
&\quad + (\mathcal{N}(c_۱, c_۲) + \mathcal{N}(c_۱, c_۳) + \mathcal{N}(c_۲, c_۳)) \\
&\quad - \mathcal{N}(c_۱, c_۲, c_۳) \\
&= ۱۰۰ - (۵۰ + ۲۰ + ۱۴) + (۱۰ + ۷ + ۲) - ۱ \\
&= ۳۴.
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

مثال ۲۲.۳ با استفاده از اصل شمول‌ـ‌طرد، تعداد توابع پوشا از یک مجموعه m عضوی به یک مجموعه n عضوی را مشخص کنید.

حل : دو مجموعه $A = \{a_۱, a_۲, \ldots, a_m\}$ و $B = \{b_۱, b_۲, \ldots, b_n\}$ با شرط $m \geq n$ را در نظر بگیرید. تعداد اعضای $S = \{f | f : A \to B\}$ برابر n^m است (چرا). خاصیت c_i، $۱ \leq i \leq n$ را برای اعضای S به این صورت تعریف می‌کنیم که «تابع f در خاصیت c_i صدق می‌کند هرگاه b_i در حوزهٔ مقادیر (برد) f قرار نداشته باشد.» در این صورت، $\mathcal{N}(\bar{c}_i)$ تعداد توابعی مانند f است که b_i در حوزه مقادیر تابع f قرار دارد. بنابراین $\overline{\mathcal{N}} = \mathcal{N}(\bar{c}_۱, \bar{c}_۲, \ldots, \bar{c}_n)$ تعداد توابع پوشای $f : A \to B$ است. چون هر عضو مجموعه B می‌تواند به عنوان مختص دوم در زوج مرتب مربوط به تابع f قرار گیرد، پس برای هر i، $۱ \leq i \leq n$ ، داریم:

$$\mathcal{N}(c_i) = (n - ۱)^m.$$

همچنین برای هر i, j، $1 \leq i < j \leq n$ به تعداد $(n - ۲)^m$ تابع $f : A \to B$ وجود دارد که b_i و b_j در حوزه مقادیر f قرار ندارند. در نتیجه :

$$\begin{aligned}
S_۱ &= \mathcal{N}(c_۱) + \mathcal{N}(c_۲) + \cdots + \mathcal{N}(c_n) = \binom{n}{۱}(n - ۱)^m, \\
S_۲ &= \mathcal{N}(c_۱, c_۲) + \mathcal{N}(c_۱, c_۳) + \cdots + \mathcal{N}(c_{n-۱}, c_n) = \binom{n}{۲}(n - ۲)^m.
\end{aligned}$$

در حالت کلی برای هر k، $n \geq k \geq ۱$ داریم:

$$S_k = \sum_{۱\leq i_۱<i_۲<\cdots<i_r\leq k} \mathcal{N}(c_{i_۱}, c_{i_۲}, \ldots, c_{i_r}) = \binom{n}{k}(n-k)^m.$$

بنا بر اصل شمول و طرد،

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{N}} &= \mathcal{N}(\bar{c}_۱, \bar{c}_۲, \ldots, \bar{c}_n) = \mathcal{N} - S_۱ + S_۲ - S_۳ + \cdots + (-۱)^n S_n \\ &= n^m - \binom{n}{۱}(n-۱)^m + \cdots + (-۱)^n\binom{n}{n}(n-n)^m \\ &= \sum_{i=۰}^{n}(-۱)^n\binom{n}{i}(n-i)^m = \sum_{i=۰}^{n}(-۱)^n\binom{n}{n-i}(n-i)^m,\end{aligned}$$

تعداد توابع پوشای $f : A \to B$ را نشان می‌دهد. $\diamondsuit$

مثال ۲۳.۳ برای هر $n \in \mathbb{Z}^+$، تابع اویلر $\phi(n)$ برابر تعداد اعداد صحیح و مثبت m است که $n \geq m \geq ۱$ و $(m,n) = ۱$ (یعنی دو عدد m و n نسبت به هم اول هستند). با استفاده از اصل شمول و طرد فرمولی برای محاسبه $\phi(n)$ بیابید.

حل : به سادگی ملاحظه می‌شود که

$$\phi(۲) = ۱, \quad \phi(۳) = ۲, \quad \phi(۵) = ۵, \quad \phi(۶) = ۲,$$

و برای هر عدد اول p، $\phi(p) = p - ۱$. به ازای $n \geq ۲$ قرار دهید:

$$n = p_۱^{\alpha_۱} p_۲^{\alpha_۲} \cdots p_r^{\alpha_r},$$

که در آن $p_۱, p_۲, \ldots, p_r$ اعداد اول متمایز و $\alpha_i \geq ۱$، $r \geq i \geq ۱$. برای درک بهتر روش حل مساله، $r = ۴$ را در نظر بگیرید. پس از مشخص کردن تابع متناظر، تعمیم آن در حالت کلی ساده است. برای $S = \{۱, ۲, \ldots, n\}$، $\mathcal{N} = |S| = n$ و برای هر i، $۴ \geq i \geq ۱$ خاصیت c_i را به صورت

«$k \in S$ در خاصیت c_i صدق می‌کند اگر و فقط اگر k بر p_i بخش پذیر باشد.»

برای هر k، $n \geq k \geq ۱$، اعداد k و n نسبت به هم اول هستند هر گاه k بر هیچ یک از اعداد اول p_i، $۴ \geq i \geq ۱$ بخش‌پذیر نباشد. پس

$$\phi(n) = \overline{\mathcal{N}} = \mathcal{N}(\bar{c}_۱, \bar{c}_۲, \bar{c}_۳, \bar{c}_۴).$$

همچنین

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(c_۱) &= \frac{n}{p_۱} && ۱ \leq i \leq ۴ \\ \mathcal{N}(c_i, c_j) &= \frac{n}{p_i p_j} && ۱ \leq i, j \leq ۴ \\ \mathcal{N}(c_i, c_j, c_k) &= \frac{n}{p_i p_j p_k} && ۱ \leq i, j, k \leq ۴ \\ \mathcal{N}(c_۱, c_۲, c_۳, c_۴) &= \frac{n}{p_۱ p_۲ p_۳ p_۴}.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\phi(n) &= S_۰ - S_۱ + S_۲ - S_۳ + S_۴ \\
& n - \left(\frac{n}{p_۱} + \frac{n}{p_۲} + \frac{n}{p_۳} + \frac{n}{p_۴}\right) + \left(\frac{n}{p_۱ p_۲} + \cdots + \frac{n}{p_۳ p_۴}\right) \\
& - \left(\frac{n}{p_۱ p_۲ p_۳} + \cdots + \frac{n}{p_۲ p_۳ p_۴}\right) + \frac{n}{p_۱ p_۲ p_۳ p_۴} \\
&= n\left[۱ - \left(\frac{۱}{p_۱} + \frac{۱}{p_۲} + \frac{۱}{p_۳} + \frac{۱}{p_۴}\right) + \left(\frac{۱}{p_۱ p_۲} + \cdots + \frac{۱}{p_۳ p_۴}\right)\right. \\
& \left. - \left(\frac{۱}{p_۱ p_۲ p_۳} + \cdots + \frac{۱}{p_۲ p_۳ p_۴}\right) + \frac{۱}{p_۱ p_۲ p_۳ p_۴}\right] \\
&= n \prod_{۱ \leq i \leq ۴} \left(۱ - \frac{۱}{p_i}\right).
\end{aligned}$$

پس در حالت کلی داریم:

$$\phi(n) = n \prod_{p_i | n} \left(۱ - \frac{۱}{p_i}\right).$$

به عنوان مثال

$$\begin{aligned}
\phi(۲۳۱۰۰) &= \phi(۲^۲ \times ۳^۱ \times ۵^۲ \times ۷^۱ \times ۱۱^۱) \\
&= ۲۳۱۰۰ \left(۱ - \frac{۱}{۲}\right)\left(۱ - \frac{۱}{۳}\right)\left(۱ - \frac{۱}{۵}\right)\left(۱ - \frac{۱}{۷}\right)\left(۱ - \frac{۱}{۱۱}\right) \\
&= ۴۸۰۰.
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

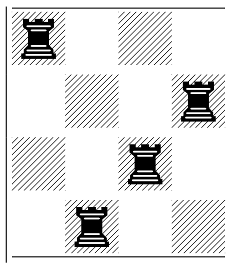
مثال ۲۴.۳ (**بی‌نظمی**) فرض کنید n شی داده شده‌اند و باید در n مکان قرار گیرند. برای سادگی، اشیاء را با a_i و مکان‌ها را با i نشان می‌دهیم ($۱ \leq i \leq n$). منظور از **بی‌نظمی** یعنی قرار دادن n شیء در n مکان به طوری که هیچ شیء a_i در مکان iام قرار نگیرد. تعداد بی‌نظمی‌های n شیء چند است؟

حل : خاصیت c_i را قرار گرفتن شیء a_i در مکان iام تعریف می‌کنیم. در این صورت، هدف مساله یافتن $\overline{\mathcal{N}} = \mathcal{N}(\bar{c}_۱, \bar{c}_۲, \ldots, \bar{c}_n)$ است. بدیهی است که

$$\mathcal{N}(c_i) = (n - ۱)!.$$

زیرا مکان iام به وسیله a_i اشغال شده است و تنها $n - ۱$ مکان خالی باقی مانده است که باید توسط بقیه $n - ۱$ شیء باقی‌مانده اشغال شوند. به همین ترتیب

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(c_i, c_j) &= (n - ۲)! \\
\mathcal{N}(c_i, c_j, c_k) &= (n - ۳)!.
\end{aligned}$$



شکل ۲.۳: نمونه‌ای از قرار گرفتن مهره‌های رخ در یک صفحه ۴ × ۴

تعداد جملات از نوع $\mathcal{N}(c_i)$ برابر $\binom{n}{۱}$ و از نوع $\mathcal{N}(c_i, c_j)$ برابر $\binom{n}{۲}$ و ... است. همچنین تعداد کل جایگشت‌ها $n!$ است. پس:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{N}} &= \mathcal{N}(\bar{c}_۱, \bar{c}_۲, \ldots, \bar{c}_n) \\
&= n! - (n-۱)!\binom{n}{۱} + (n-۲)!\binom{n}{۲} - (n-۳)!\binom{n}{۳} + \cdots \\
&= n! - (n-۱)!\frac{n!}{(n-۱)!۱!} + (n-۲)!\frac{n!}{(n-۲)!۲!} \\
&\qquad -(n-۳)!\frac{n!}{(n-۳)!۳!} + \cdots \\
&= n!\left(۱ - \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \cdots + (-۱)^n \frac{۱}{n!}\right).
\end{aligned}$$

توجه کنید که عبارت داخل پرانتز در این شمارش، تقریبی از عدد $e^{-۱}$ است. ♢

توصیف دیگری از مثال ۲۴.۳ به صورت ذیل است. یک صفحه شطرنجی $n \times n$ را در نظر بگیرید و جایگشت اعداد $۱, ۲, \ldots, n$ را با قرار دادن یک مهرهٔ رخ در مربعی که در ردیف iام و ستون jام واقع است؛ متناظر کنید. به عنوان مثال، جایگشت ۱۴۳۲ در شکل ۳.۲ نشان داده شده است. واضح است که در هر جایگشت، مهره‌ها چنان روی صفحه قرار می‌گیرند که در هر سطر و ستون فقط یک مهره قرار می‌گیرد و بر اساس خاصیت بی‌نظمی، هیچ مهره‌ای روی قطر اصلی صفحه قرار نمی‌گیرد.

بنابراین، نتیجه به دست آمده در مثال ۲۴.۳ را می‌توان بر حسب قرار دادن مهره‌های رخ در یک صفحه شطرنجی $n \times n$ به صورت زیر تعبیر کرد.

تعداد بی‌نظمی‌های n شی با تعداد حالت‌های مختلف قرار دادن n مهره رخ در یک صفحه شطرنجی $n \times n$ به طوری که هیچ کدام از مهره‌ها همدیگر را تهدید نکنند. همچنین هیچ کدام از مهره‌ها روی قطر اصلی نباشند، معادل است.

این توصیف می‌تواند مقدمه‌ای برای مربع‌های لاتین باشد که در فصل هفتم بررسی خواهند شد. در بخش بعدی نیز چندجمله‌ای‌هایی برای توصیف خواص فوق‌الذکر معرفی می‌شوند.

مجموعه S، $|S| = n$ و خواص $c_1, c_2, \ldots, c_p$ را در نظر بگیرید. بعضی از اعضای S ممکن است در برخی از این شرایط صادق باشند و یا نباشند. به کمک اصل شمول و طرد امکان شمارش $\overline{\mathcal{N}} = \mathcal{N}(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_p)$ فراهم شد. حال اگر m یک عدد صحیح دلخواه بین ۱ و p باشد، تعدادی از اعضای S که دقیقاً در m خاصیت از خواص $c_1, c_2, \ldots, c_p$ صدق می‌کنند را با E_m نشان می‌دهیم. می‌خواهیم مقدار E_m را مشخص کنیم. داریم:

$$\begin{aligned}
E_0 &= \mathcal{N}(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \ldots, \bar{c}_p)\\
E_1 &= \mathcal{N}(c_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \ldots, \bar{c}_p) + \mathcal{N}(\bar{c}_1, c_2, \bar{c}_3, \ldots, \bar{c}_p)\\
&\quad + \cdots + \mathcal{N}(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \ldots, c_p)\\
E_2 &= \mathcal{N}(c_1, c_2, \bar{c}_3, \ldots, \bar{c}_p) + \mathcal{N}(c_1, \bar{c}_2, c_3, \ldots, \bar{c}_p)\\
&\quad + \cdots + \mathcal{N}(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \ldots, c_{p-1}, c_p).
\end{aligned}$$

به عنوان مثال برای $p = 3$ و با توجه به نمودار ون (شکل ۳.۱) داریم:

$$\begin{aligned}
E_1 &= \mathcal{N}(c_1) + \mathcal{N}(c_2) + \mathcal{N}(c_3)\\
&\quad - 2\left(\mathcal{N}(c_1, c_2) + \mathcal{N}(c_1, c_3) + \mathcal{N}(c_2, c_3)\right) + 3\mathcal{N}(c_1, c_2, c_3).
\end{aligned}$$

زیرا در $\mathcal{N}(c_1) + \mathcal{N}(c_2) + \mathcal{N}(c_3)$ ناحیه‌های ۳، ۵ و ۶ هر کدام دوبار شمارش شده‌اند و اعضای ناحیهٔ ۷ نیز در هر کدام سه بار شمارش شده‌اند. چون اعضای ناحیه‌های ۳، ۵، ۶ و ۷ در بیش از یک خاصیت صدق می‌کنند، باید در این شمارش طرد شوند. پس:

$$E_1 = S_1 - 2S_2 + 3S_3 = S_1 - \binom{2}{1}S_2 + \binom{3}{2}S_3.$$

به همین ترتیب:

$$E_2 = \mathcal{N}(c_1, c_2) + \mathcal{N}(c_1, c_3) + \mathcal{N}(c_2, c_3) - 3\mathcal{N}(c_1, c_2, c_3) = S_2 - 3S_3,$$

و در نهایت

$$E_3 = \mathcal{N}(c_1, c_2, c_3) = S_3.$$

در حالت کلی قضیه بعدی برقرار است.

قضیه ۶.۳ *بر حسب نمادهای اصل شمول و طرد و برای هر m که $1 \le m \le p$، تعدادی از اعضای S که دقیقاً در m خاصیت از خواص $c_1, c_2, \ldots, c_p$ صدق می‌کنند برابر است با*

$$E_m = S_m - \binom{m+1}{1}S_{m+1} + \cdots + (-1)^{p-m}\binom{p}{p-m}S_p. \qquad (۴.۳)$$

برهان: فرض کنید $x \in S$ و سه حالت را در نظر بگیرید:

۱. اگر x در کمتر از m خاصیت صدق کند، در مجموعه‌های E_m و $S_m, S_{m+1}, \ldots, S_p$ حضور نخواهد داشت. پس در طرفین رابطهٔ (۴.۳) وجود ندارد.

۲. اگر x دقیقاً در m خاصیت از خواص $c_1, c_2, \ldots, c_p$ صدق کند، در E_m و همچنین در S_m یک بار وجود دارد ولی در مجموعه‌های $S_{m+1}, \ldots, S_p$ حضور ندارد. پس x در طرفین رابطهٔ (۴.۳) فقط یک‌بار حضور دارد.

۳. اگر x در r خاصیت از خواص $c_۱, c_۲, \ldots, c_p$ صدق کند و داشته باشیم $m < r \leq p$، در این صورت x در E_m قرار ندارد، ولی $\binom{r}{m}$ مرتبه در S_m، $\binom{r}{m+۱}$ مرتبه در $S_{m+۱}$،... و در نهایت $\binom{r}{r}$ مرتبه در S_r حضور دارد و در S_k که $k > r$ است حضور ندارد.

بنابراین در سمت راست رابطهٔ (۴.۳)، تعداد دفعاتی که x حضور دارد برابر است با

$$\binom{m}{\circ}\binom{r}{m} - \binom{m+۱}{۱}\binom{r}{m+۱} + \binom{m+۲}{۲}\binom{r}{m+۲} + \cdots + (-۱)^{r-m}\binom{r}{r-m}\binom{r}{r}.$$

در آنالیز ترکیبیاتی رابطهٔ

$$\begin{aligned}\binom{m+k}{k}\binom{r}{m+k} &= \frac{(m+k)!}{k!m!} \times \frac{r!}{(m+k)!(r-m-k)!} \\ &= \frac{r!}{m!k!(r-m-k)!} \\ &= \frac{r!}{m!(r-m)!} \times \frac{(r-m)!}{k!(r-m-k)!} \\ &= \binom{r}{m}\binom{r-m}{k},\end{aligned}$$

برقرار است. در نتیجه تعداد دفعاتی که x در سمت راست رابطهٔ (۴.۳) حضور دارد برابر است با

$$\binom{r}{m}\left[\binom{r-m}{\circ} - \binom{r-m}{۱} + \binom{r-m}{۲} + \cdots + (-۱)^{r-m}\binom{r-m}{r-m}\right] = \circ.$$

به این ترتیب، حکم ثابت می‌شود.

نتیجه ۲ *فرض کنید L_m تعدادی از اعضای S است که حداقل در m شرط از p شرط $(m \leq p)$ صدق کنند. در این صورت*

$$L_m = S_m - \binom{m}{m-۱}S_{m+۱} + \binom{m+۱}{m-۱}S_{m+۲} + \cdots + (-۱)^p\binom{p-۱}{m-۱}S_p.$$

برای $m = 1$ داریم:

$$\begin{aligned}L_۱ &= S_۱ - \binom{۱}{\circ}S_۲ + \binom{۲}{\circ}S_۳ - \cdots + (-۱)^{p-۱}\binom{p-۱}{\circ}S_p \\ &= S_۱ - S_۲ + S_۳ - \cdots + (-۱)^{p-۱}S_p \\ &= \mathcal{N} - \overline{\mathcal{N}} = |S| - \overline{\mathcal{N}}.\end{aligned}$$

مثال ۲۵.۳ در یک منطقه، ۵ مجتمع مسکونی وجود دارد و می‌خواهیم راه‌های دو طرفه بین آنها ایجاد کنیم به طوری که هیچ مجتمعی از بقیه جدا نباشد (حداقل یک راه به هر مجتمع ختم شود). به چند روش می‌توان این راه‌ها را ایجاد کرد؟

حل : این مجتمع‌ها را به ترتیب a, b, c, d, e بنامید. فرض کنید مجموعه راه‌های بین مجتمع‌ها S است. در این صورت $n = |S| = ۱۰$. زیرا $\binom{۱۰}{۲}$ روش مختلف برای متصل کردن این مجتمع‌ها وجود دارد. برای هر i، $۱ \leq i \leq ۵$ خاصیت c_i را جدا بودن مجتمع iام از بقیه مجتمع‌ها فرض کنید. در این صورت $\overline{\mathcal{N}} = \mathcal{N}(\bar{c}_۱, \bar{c}_۲, \bar{c}_۳, \bar{c}_۴, \bar{c}_۵)$ جواب مساله است. داریم:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N}(c_i) = ۲^۶ && S_۱ = \binom{۵}{۱} \times ۲^۶\\
&\mathcal{N}(c_i, c_j) = ۲^۳ && S_۲ = \binom{۵}{۲} \times ۲^۳\\
&\mathcal{N}(c_i, c_j, c_k) = ۲^۱ && S_۳ = \binom{۵}{۳} \times ۲^۱\\
&\mathcal{N}(c_i, c_j, c_k, c_l) = ۲^۰ && S_۴ = \binom{۵}{۴} \times ۲^۰\\
&\mathcal{N}(c_۱, c_۲, c_۳, c_۴, c_۵) = ۲^۰ && S_۵ = \binom{۵}{۵} \times ۲^۰
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{N}} &= \sum_{r=۰}^{۵} (-۱)^r S_r\\
&= ۲^{۱۰} - \binom{۵}{۱} ۲^۶ + \binom{۵}{۲} ۲^۳ - \binom{۵}{۳} ۲^۱ + \binom{۵}{۴} \times ۲^۰ - \binom{۵}{۵} ۲^۰\\
&= ۷۶۸.
\end{aligned}$$

تعداد راه‌هایی که دقیقاً دو مجتمع از بقیه جدا باشند عبارت است از:

$$\begin{aligned}
E_۲ &= S_۲ - \binom{۳}{۱} S_۳ + \binom{۴}{۲} S_۴ - \binom{۵}{۳} S_۵\\
&= ۸۰ - ۳ \times ۲۰ + ۶ \times ۵ - ۱۰ \times ۱ = ۴۰.
\end{aligned}$$

همچنین تعداد راه‌هایی که حداقل دو مجتمع از بقیه جدا باشند عبارت است از:

$$\begin{aligned}
L_۲ &= S_۲ - \binom{۲}{۱} S_۳ + \binom{۳}{۱} S_۴ - \binom{۴}{۱} S_۵\\
&= ۸۰ - ۲ \times ۲۰ + ۳ \times ۵ - ۴ \times ۱ = ۵۱.
\end{aligned}$$

خواننده علاقمند می‌تواند شمارش‌های مشابهی را انجام دهد. با حل این مساله می‌توان تعداد گراف‌های همبند با n راس را شمرد (فصل چهارم را نگاه کنید). $\diamondsuit$

تمرین ۳.۳

۱. تعداد جایگشت‌های ۲۶ حرف الفبای انگلیسی را پیدا کنید که شامل رشته‌های CAT و DOG نیستند.

۲. فرمولی برای محاسبه $|A - B|$ بر حسب $|A|$، $|B|$ و $|A \cap B|$ بیابید. آیا فرمول با شرط $B \subseteq A$ ساده‌تر می‌شود؟ با شرط $A \subseteq B$ چطور؟ اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند چطور؟

۳. نامساوی

$$|A \cup B \cup C| \leq |A \cup B| + |A \cup C|,$$

را در نظر بگیرید. اگر این نامساوی درست است آن را ثابت کنید. در غیر این صورت با آوردن یک مثال نقض رد کنید.

۴. خواسته‌های سوال سوم را در مورد نامساوی

$$|A \cup B \cup C| \leq |A \cup B| + |A \cup C| - |A \cap B \cap C|,$$

پاسخ دهید.

۵. نشان دهید برای مجموعه‌های دلخواه $A_۱, A_۲, \ldots, A_n$ نامساوی

$$|A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots \cup A_n| \leq |A_۱| + |A_۲| + \cdots + |A_n|,$$

برقرار است و تساوی زمانی برقرار است که این مجموعه‌ها دو به دو جدا از هم باشند، یعنی برای هر i, j که $i \neq j$، $A_i \cap A_j = \varnothing$.

۶. در یک نبرد، از میان ۱۰۰ رزمنده، ۸۰ نفر از ناحیه دست، ۸۵ نفر از ناحیه پا، ۷۰ نفر از ناحیه چشم و ۷۵ نفر از ناحیه گوش زخمی شده اند. حداقل چند نفر از چهار ناحیه بدن زخمی شده‌اند (از مساله ۵ استفاده کنید)؟

۷. فرض کنید X یک مجموعه n عضوی است.

(آ) نشان دهید تعداد توابع پوشا و یک به یک روی مجموعه X، $n!$ است.

(ب) اگر f یک تابع پوشا و یک به یک روی مجموعه X باشد، $x \in X$ را نقطهٔ ثابت f گویند هرگاه $f(x) = x$ باشد. تعداد توابعی که نقطهٔ ثابت ندارند را با $\mathrm{nofix}(n)$ نشان دهید. به عنوان مثال، $\mathrm{nofix}(۳) = ۲$. این دو تابع را که نقطهٔ ثابت ندارند مشخص کنید.

(ج) $\mathrm{nofix}(n)$ را برای $۱ \leq n \leq ۴$ مشخص کنید.

(د) فرمول کلی برای $\mathrm{nofix}(n)$ بیابید.

۸. فرض کنید X و Y دو مجموعه هستند طوری که ۳۶ تابع پوشا از X به Y موجود است. در مورد $|X|$ و $|Y|$ چه می‌توان گفت؟

۹. افرازی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۷\}$ به سه مجموعهٔ جدا از هم در نظر بگیرید. به عنوان مثال افراز $\{\{۱, ۲, ۳\}, \{۴, ۵\}, \{۶, ۷\}\}$ را در نظر بگیرید. تابع f را روی این مجموعه به مجموعهٔ $B = \{۱, ۲, ۳\}$ به صورت

$$f(۱) = f(۲) = f(۳) = ۱, \quad f(۴) = f(۵) = ۲, \quad f(۶) = f(۷) = ۳,$$

در نظر بگیرید.

(آ) نشان دهید تابع f پوشا است.

(ب) نشان دهید تعداد توابعی از نوع f، $6 = 3!$ است.

(ج) در حالت کلی نشان دهید هر افراز m عضوی از مجموعهٔ $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$، تعداد $m!$ تابع پوشا از این مجموعه به مجموعهٔ $\{1, 2, 3, \ldots, m\}$ تعریف می‌کند.

۱۰. فرض کنید $S(n, m)$ تعداد افرازهای مجموعهٔ $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ به m مجموعه دو به دو متمایز است. نشان دهید:

$$S(n, m) = \frac{1}{m!} \mathrm{onto}(n, m),$$

که در آن $\mathrm{onto}(n, m)$ تعداد توابع پوشا از یک مجموعهٔ n عضوی به یک مجموعه m عضوی است.

۱۱. دست نوشته‌های n دانشجو را بین خودشان توزیع می‌کنیم. نشان دهید احتمال این‌که هیچ کس دست نوشتهٔ خود را دریافت نکند، وقتی $n \to \infty$ برابر $\frac{1}{e}$ است.

۱۲. جایگشت ۳۵۱۴۲ را به صورت نمودار صفحهٔ شطرنجی نمایش دهید.

۱۳. به چند طریق می‌توان ۵ مهره رخ را در یک صفحهٔ شطرنجی 5×5 آرایش داد به طوری که همدیگر را تهدید نکنند؟ در چند حالت مهره‌ای روی قطر اصلی قرار ندارد؟ در چند حالت دقیقاً یک مهره روی قطر اصلی قرار دارد؟ در چند حالت حداقل یک مهره روی قطر اصلی قرار دارد؟

۱۴. تعداد جایگشت‌هایی از اعداد $1, 2, \ldots, 8$ را بیابید که در آنها ارقام ۱۲، ۳۴، ۵۶ و ۷۸ ظاهر نمی‌شوند.

۱۵. تعداد تمامی اعداد طبیعی که در هر چهار معادلهٔ

$$7[x] = [7x], \quad [7x] = 7, \quad , [7x + 7] = x + 7, \quad [x + 7] = [x] + 7.$$

صدق می‌کنند را بیابید. (راهنمایی: از اصل شمول و طرد استفاده کنید.)

۱۶. به چند روش می‌توان ۱۰ جایزه را بین ۴ نفر توزیع کرد به طوری که دو نفر هیچ جایزه‌ای نگیرند؟

۱۷. به چند طریق می‌توان سه x، سه y و سه z را در یک ردیف کنار هم قرار داد به طوری که در هیچ حالت xyz ظاهر نشود؟

۱۸. چند شماره تلفن شش رقمی وجود دارند که ارقام آن به صورت $ababab$ هستند؟

۱۹. چند شماره تلفن شش رقمی وجود دارند که ارقام آن به صورت $abcabc$ هستند؟

۲۰. با استفاده از اصل شمول و طرد، تعداد اعداد اول بین ۱ و ۴۸ را بیابید.

۲۱. n زن و شوهر باید روی $2n$ صندلی دور یک میز بنشینند ($n \geq 3$). فرض کنید n زن قبلاً روی صندلی‌ها نشسته‌اند، طوری که تنها یک صندلی بین دو نفر خالی است. فرض کنید $M(n, r)$

نشان دهندهٔ تعداد حالت‌های مختلف نشستن n مرد در صندلی‌های خالی است، طوری که دقیقاً r نفر از مردان در کنار همسر خود نشسته‌اند. با استفاده از اصل شمول و طرد نشان دهید:

$$M(n,r)=\sum_{k=r}^{n}(-۱)^{k-r}\binom{k}{r}\frac{۲n}{۲n-k}\binom{۲n-k}{k}(n-k)!$$

(راهنمایی: خاصیت c_i را نشستن مرد iام در سمت راست همسرش در نظر بگیرید.)

۲۲. اعداد طبیعی r، n و k را در نظر بگیرید. با استفاده از اصل شمول و طرد نشان دهید تعداد جواب‌های صحیح معادلهٔ

$$x_۱+x_۲+\cdots+x_n=r,$$

با شرط $۰\leq x_i\leq k$ از رابطه

$$\sum_{j=۰}^{m}(-۱)^{j}\binom{n}{j}\binom{r-(k+۱)j+n-۱}{n-۱},$$

به دست می‌آید.

۴.۳ چندجمله‌ای‌های رخ

در مثال ۲۴.۳ دیدیم که مساله بی‌نظمی با مساله قرار دادن مهره‌های رخ در یک صفحه شطرنجی به طوری که مهره‌ها همدیگر را تهدید نکنند و افزون بر آن، هیچ‌کدام از این مهره‌ها روی قطر اصلی صفحه شطرنجی قرار نگیرند، معادل شد. این مثال حدسی را موجب می‌شود که شاید بتوان بسیاری از مسایل ترکیبیاتی را با حالت‌های مختلف قرار گرفتن مهره‌های رخ در یک صفحه شطرنجی متناظر کرد.

در این بخش، چندجمله‌ای‌هایی را مطرح می‌کنیم که با استفاده از آنها می‌توان برای تعداد مختلف مهره‌های رخ، تعداد روش‌های مختلف قرار گرفتن این مهره‌ها در صفحه‌ای مانند C را معین کرد به طوری که مهره‌ها یکدیگر را تهدید نکنند. حالت کلی‌تر این چندجمله‌ای‌ها، چندجمله‌ای‌های مولد هستند که در فصل پنجم خواهند آمد.

چندجمله‌ای رخ

فرض کنید C یک صفحه دلخواه با m مربع است. برای هر $k<m$، فرض کنید $r_k(C)$ نشان دهندهٔ تعداد راه‌های مختلف قرار دادن k مهرهٔ رخ در صفحه C است که مهره‌ها یکدیگر را تهدید نکنند. چندجمله‌ای به صورت

$$R(x,C)=r_۰(C)+r_۱(C)x+r_۲(C)x^۲+\cdots+r_m(C)x^m,$$

را **چندجمله‌ای رخ** روی صفحه C می‌نامیم.

مثال ۲۶.۳ چندجمله‌ای رخ برای صفحه شطرنجی ۴×۴ را بیابید.

حل : صفحه شطرنجی 4×4 را C می‌نامیم. ابتدا $r_i(C)$ را برای $1 \leq i \leq 16$ محاسبه می‌کنیم. بدیهی است که برای $i > 4$، $r_i(C) = 0$ است. مقدار $r_0(C)$ یعنی تعداد حالت‌های مختلف قرار دادن هیچ مهره رخ در صفحه C برابر یک است. زیرا تنها حالت ممکن، خالی کردن صفحه C از مهره است. همچنین $r_1(C) = 16$، زیرا یک مهره را می‌توان در هر یک از شانزده مربع خالی صفحه C قرار داد.
برای محاسبه $r_2(C)$، چون مهره‌ها باید در سطرها و ستون های مختلف قرار گیرند، پس تعداد حالت‌های مختلف انتخاب دو سطر از چهار سطر عبارت است از $\binom{4}{2}$. هرگاه سطری انتخاب شود، مهره اول می‌تواند در هر یک از چهار خانه خالی این سطر قرار گیرد، ولی برای قرار دادن مهره دوم در سطر دیگر، تنها سه مربع باقی می‌ماند. پس:

$$r_2(C) = \binom{4}{2} \times 4 \times 3 = 72.$$

به همین ترتیب

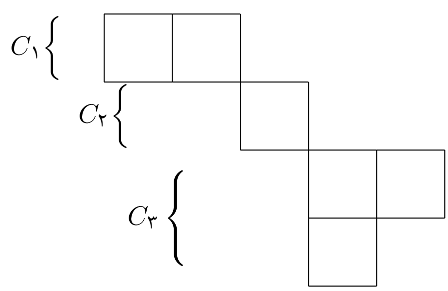
$$\begin{aligned} r_3(C) &= \binom{4}{3} \times 4 \times 3 \times 2 = 96, \\ r_4(C) &= \binom{4}{4} \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24. \end{aligned}$$

پس چندجمله‌ای رخ برای صفحه C به صورت

$$R(x, C) = 1 + 16x + 72x^2 + 96x^3 + 24x^4,$$

است. $\diamondsuit$

در صفحه‌هایی که به شکل استاندارد $n \times n$ نیستند، یافتن چندجمله‌ای رخ، اگر غیر ممکن نباشد، ساده نیست. در بعضی از موارد، پیدا کردن این چندجمله‌ای با روش‌هایی امکان‌پذیر است. یکی از روش‌ها، تجزیهٔ صفحه C به صفحه‌های ساده‌تر مانند $C_1, C_2, \ldots, C_k$ است به طوری که برای هر $1 \leq i, j \leq k$، هیچ مربعی از جدول C_i در سطر یا ستون جدول C_j قرار نگیرد. در این صورت، جدول‌های $C_1, C_2, \ldots, C_k$ را «متمایز» می‌نامند. به عنوان مثال، جدول C در شکل بعدی به سه جدول C_1, C_2, C_3 تفکیک می‌شود.



قضیه بعدی روشی را برای پیدا کردن چندجمله‌ای رخ، وقتی بتوان صفحه شطرنجی را به صفحات متمایز افراز کرد، ارائه می‌کند.

قضیه ۷.۳ *اگر صفحه شطرنجی C از دو قسمت مجزای A و B تشکیل شده باشد. آنگاه چندجمله‌ای رخ برای C، از ضرب چندجمله‌ای‌های رخ برای قسمت‌های A و B به دست می‌آید.*

برهان: وقتی k مهره روی صفحه C قرار می‌گیرند، t مهره در قسمت A و $k-t$ مهره باقیمانده در قسمت B قرار می‌گیرند که در آن $0 \leq t \leq k$. چون $r_t(A)$ که حالت‌های مختلف قرار دادن t مهره در قسمت A است می‌تواند برای هر جایگذاری $k-t$ مهره در ناحیه B، یعنی $r_{k-t}(B)$ انجام گیرد (زیرا A و B هیچ‌کدام مزاحم دیگری نیست)، پس

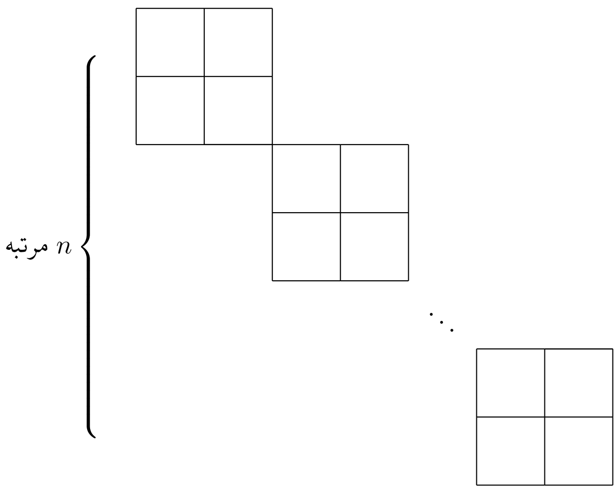
$$r_k(C) = r_0(A)r_k(B) + r_1(A)r_{k-1}(B) + \cdots + r_k(A)r_0(B).$$

توجه داشته باشید که سمت راست این تساوی، ضریب x^k در حاصل ضرب

$$\left(r_0(A) + r_1(A)x + r_2(A)x^2 + \cdots\right)\left(r_0(B) + r_1(B)x + r_2(B)x^2 + \cdots\right),$$

است و به این ترتیب، اثبات قضیه کامل می‌شود.

مثال ۲۷.۳ فرض کنید C شامل n بلوک متمایز مانند شکل زیر است:



چندجمله‌ای رخ برای C را بیابید.

حل : چندجمله‌ای رخ برای یک بلوک 2×2 به صورت $1 + 4x + 2x^2$ است (چرا). بنا بر قضیه ۷.۳ چندجمله‌ای رخ برای صفحه C به صورت

$$R(x, C) = (1 + 4x + 2x^2)^n,$$

است. $\diamondsuit$

گرچه استفاده از قضیه ۷.۳ در بسیاری از موارد مفید است ولی به طور گسترده قابل استفاده نیست. برای صفحه‌هایی که به قسمت‌های متمایز قابل تفکیک نیستند مشکل به قوت خود باقی است. قضیه بعدی برای حالت کلی مفید است. ابتدا تعریفی را ارایه می‌کنیم.

اگر مربعی در صفحه شطرنجی C به دلخواه انتخاب شود، با حذف سطر و ستون شامل این مربع، صفحه شطرنجی دیگری به وجود می‌آید که آن را «صفحه شطرنجی کوچک‌تر» نامیده و با C_s نشان می‌دهیم. اگر در صفحه شطرنجی C، فقط مربع انتخاب شده حذف شود، صفحه شطرنجی باقیمانده را «صفحه شطرنجی محذوف» نامیده و با C_e نشان می‌دهیم.

قضیه ۸.۳ *صفحه شطرنجی C داده شده است. مربعی را به دلخواه انتخاب کرده و صفحه‌های C_s و C_e را تشکیل می‌دهیم. در این صورت رابطهٔ*

$$R(x, C) = xR(x, C_s) + R(x, C_e),$$

برقرار است.

برهان: اگر $k \geq ۱$ مهره رخ غیرتهدیدکننده روی این صفحه قرار داده شوند، دو حالت امکان‌پذیر است:

حالت اول: ممکن است یکی از مهره‌ها در مربع انتخاب شده قرار گیرد. در این حالت باید $k - ۱$ مهره باقیمانده در C_s قرار داشته باشند و این کار به $r_{k-۱}(C_s)$ روش امکان‌پذیر است.

حالت دوم: ممکن است مهره‌ای در مربع انتخاب شده قرار نگیرد. در این حالت، تمامی k مهره در صفحه C_e قرار دارند و این کار به $r_k(C_e)$ روش مختلف امکان‌پذیر است. پس

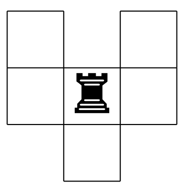
$$r_k(C) = r_{k-۱}(C_s) + r_k(C_e).$$

بنا به تعریف چندجمله‌ای رخ

$$\begin{aligned}
R(x, C) &= \sum_{k=۰}^{\infty} r_k(C)x^k = ۱ + \sum_{k=۱}^{\infty} r_k(C)x^k \\
&= ۱ + \sum_{k=۱}^{\infty} \left[r_{k-۱}(C_s) + r_k(C_e)\right] x^k \\
&= ۱ + \sum_{k=۱}^{\infty} r_{k-۱}(C_s)x^k + \sum_{k=۱}^{\infty} r_k(C_e)x^k \\
&= xR(x, C_s) + R(x, C_e),
\end{aligned}$$

و به این ترتیب قضیه اثبات می‌شود.

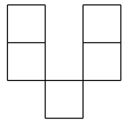
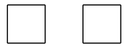
مثال ۲۸.۳ چندجمله‌ای رخ را برای صفحه شطرنجی



بیابید.

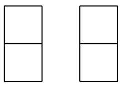
حل : مربع وسطی را انتخاب می‌کنیم (در شکل فوق داخل مربع انتخاب شده مهره رخ قرار داده شده است) . در این صورت، بنا بر قضیه ۸.۳ داریم :

$$R(x,C)=xR(x,C_s)+R(x,C_e),$$

که در آن $C_e=$  و $C_s=$  و

$$R(x,C_s)=۱+۲x.$$

حال، بنا بر قضیه ۷.۳، ناحیه C_e را به دو ناحیه متمایز A و B به صورت

$A=$  $B=$ 

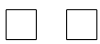
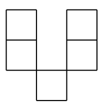
تفکیک می‌کنیم. چون:

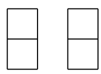
$$\begin{aligned} R(x,A) &= ۱+۴x+۲x^{۲} \\ R(x,B) &= ۱+x, \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} R(x,C) &= x(۱+۲x)+(۱+x)(۱+۴x+۲x^{۲}) \\ &= ۱+۶x+۸x^{۲}+۲x^{۳}. \end{aligned}$$

اگر بخواهیم مساله را به شکل نمادی حل کنیم، می‌نویسیم:

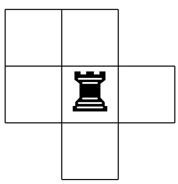
$R(x,C) = xR\Big($  $\Big)+R\Big($  $\Big)$

$= x(۱+۲x)+R\Big($  $\Big)R\Big($  $\Big)$

$$= x(۱+۲x)+(۱+۴x+۲x^{۲})(۱+x)$$

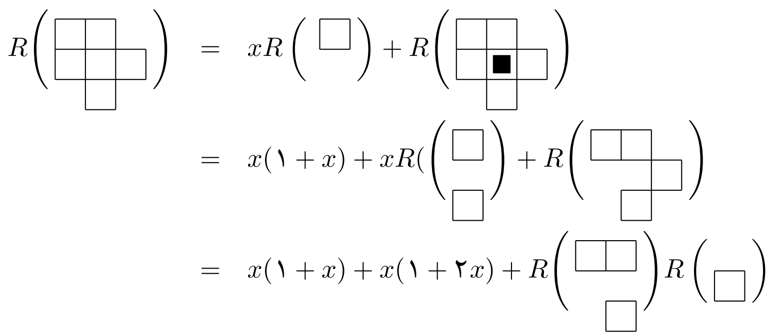
$\diamondsuit$

مثال ۲۹.۳ چندجمله‌ای رخ برای صفحه شطرنجی



را به شکل نمادی به دست آورید.

حل : مربعی را انتخاب کرده و ادامه می‌دهیم (در شکل، مربع انتخاب شده با مهره رخ سیاه مشخص شده است).



$$= x(2+3x)+(1+3x+x^2)(1+x)$$
$$= 1+6x+7x^2+x^3.$$

$\diamondsuit$

توجه داشته باشید که یک صفحه شطرنجی غیراستاندارد را می‌توان به صورت یک صفحه شطرنجی $n\times n$ در نظر گرفت که قرار دادن مهره در برخی مربع‌ها مجاز نیست. قضیه بعدی روشی برای پیدا کردن چندجمله‌ای رخ چنین صفحاتی را بیان می‌کند.

قضیه ۹.۳ *برای یک صفحه شطرنجی $n\times n$، تعداد حالت‌های مختلف قرار دادن m مهره رخ غیر تهدید کننده، به طوری که هیچ‌کدام از مهره‌ها در مربع غیرمجاز قرار نگیرند، برابر است با*

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k(m-k)!r_k,$$

که در آن r_k تعداد حالت‌های مختلف قرار دادن k مهره غیر تهدید کننده در مربع‌های غیرمجاز است.

برهان: با توجه به نمادهای اصل شمول و طرد، فرض کنید صدق کردن یک جایگذاری مهره‌ها روی صفحه شطرنجی در خاصیت c_i، به این مفهوم است که مهره iام در یک مربع غیرمجاز قرار داده شده است. در این صورت، تعداد جایگذاری‌هایی که هیچ مهره‌ای در مربع غیرمجاز قرار نگیرد برابر است با:

$$n! - [\mathcal{N}(c_1)+\mathcal{N}(c_2)+\cdots+\mathcal{N}(c_m)]$$
$$+ [\mathcal{N}(c_1,c_2)+\mathcal{N}(c_1,c_3)+\cdots+\mathcal{N}(c_{m-1},c_m)] - \cdots$$

برای هر i که در آن $1\le i\le m$، مقدار $\mathcal{N}(c_i)$ مساوی $(m-1)!S_i$ است که در آن، S_i تعداد مربع‌های غیرمجاز در سطر iام است. زیرا، iامین مهره می‌تواند در هر یک از S_i مربع غیرمجاز قرار گیرد و برای بقیه $m-1$ مهره، $(m-1)!$ جایگذاری متمایز وجود دارد. از طرف دیگر

$$S_1+S_2+\cdots+S_m = r_1,$$

بنابراین

$$\mathcal{N}(c_1)+\mathcal{N}(c_2)+\cdots+\mathcal{N}(c_m) = (m-1)!\,[S_1+S_2+\cdots+S_m] = (m-1)!r_1.$$

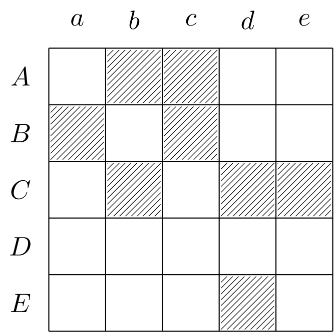
به همین ترتیب:

$$\mathcal{N}(c_۱, c_۲) + \mathcal{N}(c_۱, c_۳) + \cdots + \mathcal{N}(c_{m-۱}, c_m) = (m - ۲)!r_۲.$$

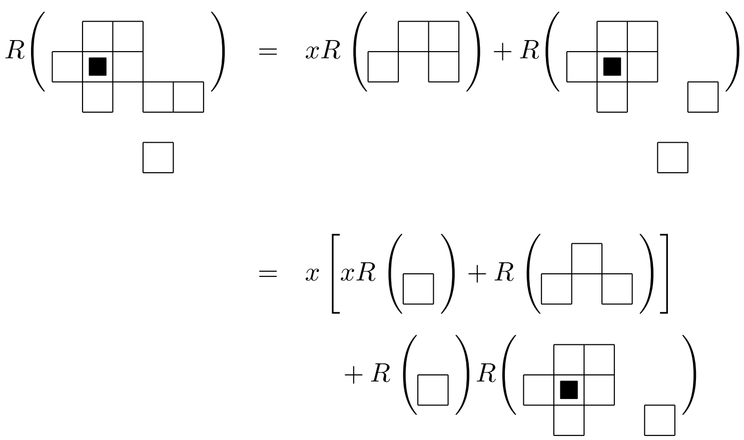
با ادامه استدلال، اثبات قضیه کامل می‌شود.

مثال ۳۰.۳ مدیر یک کارخانه پنج نفر داوطلب به اسامی A, B, C, D, E برای پنج شغل a, b, c, d, e دارد. او می‌داند که فرد A برای شغل‌های b, c مناسب نیست. به همین ترتیب، فرد B برای شغل‌های a, c، فرد C برای شغل‌های b, d, e مناسب نیستند و فرد E تنها برای شغل d مناسب نیست. مدیر این کارخانه به چند طریق می‌تواند شغل‌ها را برای داوطلب‌های مناسب تخصیص دهد؟

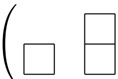
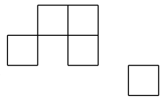
حل : وضعیت مساله را با صفحه شطرنجی زیر توصیف می‌کنیم.

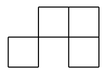


مربع‌هایی که در این شکل علامت خورده‌اند، نشان دهندهٔ نامناسب بودن افراد متناظر برای شغل‌های مورد نظر هستند. ممکن است برای پیدا کردن چندجمله‌ای رخ، مستقیماً از مربع‌های علامت نخورده صفحه شطرنجی استفاده کرد ولی این کار زمان زیادی نیاز دارد. در واقع ساده‌تر است که از قضیه ۹.۳ استفاده کنیم. بنابراین لازم است که چندجمله‌ای رخ را برای مربع‌های علامت خورده مشخص کنیم. این چندجمله‌ای عبارت است از:



پس

$$R(x,C) = x\left[x(1+x)+(1+3x+2x^2)\right]+(1+x)\Bigg[xR\Bigg($$

$$\Bigg) + R\Bigg($$

$$\Bigg)\Bigg]$$

$$= x(1+4x+3x^2) + (1+x)\Bigg[x(1+3x+x^2)+(1+x)R\Bigg($$

$$\Bigg)\Bigg]$$

$$\begin{aligned} &= x(1+4x+3x^2)+ \\ &\quad (1+x)\left[x(1+3x+x^2)+(1+x)(1+4x+3x^2)\right] \\ &= 1+8x+20x^2+17x^3+4x^4. \end{aligned}$$

بنابراین

$$r_0=1,\quad r_1=8,\quad r_2=20,\quad r_3=17,\quad r_4=4,$$

و برای $n=5$ تعداد جواب

$$5!-4!\times 8+3!\times 20-2!\times 17+4=18,$$

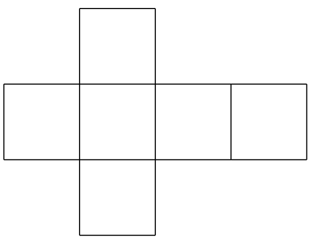
است. $\diamondsuit$

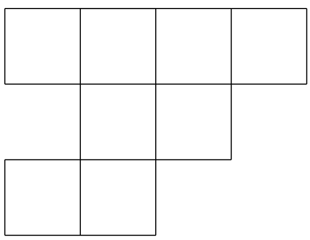
تمرین ۴.۳

۱. چندجمله‌ای رخ را برای صفحه شطرنجی متعارف 8×8 بیابید.

۲. چندجمله‌ای رخ را برای صفحه شطرنجی متعارف $n\times n$ بنویسید.

۳. چندجمله‌ای رخ را برای صفحه‌های شطرنجی زیر بیابید.





۴. چندجمله‌ای رخ برای یک صفحه شطرنجی مستطیلی $n\times m$ را با $R_{n,m}(x)$ نشان می‌دهیم. ثابت کنید:

$$R_{n,m}(x)=R_{n-1,m}(x)+mxR_{n-1,m-1}(x).$$

همچنین نشان دهید:

$$R_{n,m}(x)=R_{n,m-1}(x)+nxR_{n-1,m-1}(x).$$

۵. پنج نوع لباس با نام‌های A, B, C, D, E و چهار رنگ مختلف $۱, ۲, ۳, ۴$ داده شده‌اند. بر اساس تجربیات قبلی می‌دانیم که رنگ شماره ۱ برای لباس‌های نوع B و C مناسب نیستند. همچنین رنگ شماره ۲ برای لباس نوع C، رنگ شماره ۳ برای لباس‌های نوع A و E و رنگ شماره ۴ برای لباس نوع B مناسب نیست. به چند طریق می‌توان این پنج نوع لباس را با رنگ‌های مطلوب تولید و عرضه کرد؟ برای پاسخ دادن از چندجمله‌ای‌های رخ استفاده کنید.

۶. چهار نفر در یک مهمانی حضور دارند. این افراد را p_1, p_2, p_3, p_4 بنامید. در هر یک از میزهای T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 نیز تنها یک صندلی خالی وجود دارد. بنا بر روابط خانوادگی، شرایط زیر در مهمانی وجود دارد:

- شخص p_1 نمی‌خواهد در میزهای T_1 و T_2 بنشیند.
- شخص p_3 نمی‌خواهد در میزهای T_3 و T_4 بنشیند.
- شخص p_2 نمی‌خواهد در میز T_2 بنشیند.
- شخص p_4 نمی‌خواهد در میزهای T_4 و T_5 بنشیند.

مساله را به صورت یک صفحه شطرنجی مناسبی متناظر کرده و با استفاده از چندجمله‌ای رخ، تعداد حالت‌های مختلف نشستن این چهار نفر را در پنج میز تعیین کنید.

۵.۳ اصل لانه کبوتر

اصل لانهٔ کبوتر که به نام‌های «اصل جعبه کفش» یا «اصل کشویی دریکله»[۱] مشهور است، اغلب برای پاسخ به سوال زیر مفید است:

> **سوال:**
>
> آیا اشیایی وجود دارند که در خاصیت مشخصی صدق کنند؟

این اصل اولین بار توسط دریکله در نظریه اعداد به کار برده شد. کلمه «لانه کبوتر»[۲] به نوعی میزهای تحریر قدیمی گفته می‌شود که افرازهای چوبی کوچک برای قراردادن نامه‌ها در آن تعبیه شده‌است.

توجه داشته باشید که اگر اصل لانهٔ کبوتر به طور موفقیت‌آمیزی به کار رود، تنها وجود چنین اشیایی را ثابت می‌کند و چیزی در مورد روش پیدا کردن این اشیا و یا تعداد آنها بیان نمی‌کند. شکل ساده‌ای از این اصل چنین است:

> **اصل لانهٔ کبوتر ــ شکل اول:**
>
> n کبوتر در k لانه قرار می‌گیرند. اگر $k < n$، آنگاه تعدادی از لانه‌ها بیش از یک کبوتر دارند.

درستی این اصل اغلب به برهان خلف ثابت می شود. اگر این اصل برقرار نباشد، آنگاه هر لانه حداکثر یک کبوتر دارد و بنابراین، حداکثر k کبوتر وجود دارد که با فرض $n > k$ و وجود n کبوتر

[۱] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)
[۲] pigeonhole

متناقض است. دقت کنید که این اصل اطلاعاتی دربارهٔ لانه‌هایی که حداقل دو کبوتر دارند ارایه نمی‌کند و تنها وجود چنین لانه‌هایی را تایید می‌کند.
در استفاده از این اصل در حل مسایل، باید تصمیم گرفت که نقش کبوترها و لانه‌ها چگونه تعبیر می‌شوند. برای توصیف بیشتر به مثال بعدی توجه کنید.

مثال ۳۱.۳ ده نفر به اتاقی وارد شده‌اند که اسامی آنها احمد، رضا و مهدی و نام خانوادگی آنها محمدیان، رسولی و رضایی است. نشان دهید حداقل دو نفر از این ده نفر نام و نام خانوادگی یکسانی دارند.

حل : تنها ۹ امکان برای تولید اسامی متمایز وجود دارد. اگر افراد را به عنوان کبوتر و اسامی را به منزلهٔ لانه کبوتر فرض کنیم، آنگاه بنا بر اصل لانهٔ کبوتر، بعضی از اسامی (لانه‌ها) به حداقل دو نفر (کبوترها) نسبت داده می‌شود. $\diamondsuit$

اصل لانه کبوتر ــ شکل دوم:

اگر f یک تابع از یک مجموعه متناهی X به مجموعه متناهی Y باشد و $|X| \geq |Y|$، آنگاه برای برخی $x_۱, x_۲$ داریم $f(x_۱) = f(x_۲)$ در حالی که $x_۱ \neq x_۲$.

این شکل از اصل لانه کبوتر را می‌توان با قرار دادن مجموعه X به جای مجموعه کبوترها و مجموعه Y به جای مجموعه لانه‌ها به شکل اول برگرداند. با این تعبیر، کبوتر x را به لانه $f(x)$ نسبت می‌دهیم. بنا بر شکل اول اصل لانه کبوتر، حداقل دو کبوتر $x_۱, x_۲$ با شرط $x_۱ \neq x_۲$ به مجموعه کبوترها متعلق هستند که به یک لانه نسبت داده می‌شوند، یعنی $f(x_۱) = f(x_۲)$.

مثال ۳۲.۳ بیست نفر در یک سالن جمع شده‌اند. نشان دهید حداقل دو نفر در این جمع وجود دارند که تعداد دوستان آنها در این مجلس مساوی است.

حل : بیست نفر را با شماره‌های $۱, ۲, \ldots, ۲۰$ نشان می‌دهیم. فرض کنید برای نفر iام، تعداد a_i دوست در این جمع وجود دارد. a_i از مجموعه $\{۰, ۱, \ldots, ۱۹\}$ انتخاب می‌شود. تابعی از مجموعه $\{۱, ۲, \ldots, ۲۰\}$ بر اساس رابطه دوست بودن تعریف می‌شود. ولی هنوز استفاده از اصل لانه کبوتر امکان‌پذیر نیست (چرا؟). واضح است که ۰ و ۱۹ به طور همزمان در حوزه مقادیر این تابع قرار ندارد (چرا؟). بنابراین، حوزه مقادیر این تابع یکی از دو مجموعه $\{۰, ۱, ۲, \ldots, ۱۸\}$ یا $\{۱, ۲, \ldots, ۱۹\}$ است. با توجه به شکل دوم اصل لانه کبوتر، حداقل دو مقدار a_i و a_j با شرط $i \neq j$ وجود دارند به طوری که $a_i = a_j$. $\diamondsuit$

مثال ۳۳.۳ در تالار امتحانات، صندلی‌ها از ۱ تا ۳۰۰ شماره‌گذاری شده‌اند و ۱۵۱ دانشجو برای شرکت در امتحان وارد تالار می‌شوند. نشان دهید حداقل دو دانشجو در صندلی‌های مجاور می‌نشینند.

حل : فرض کنید صندلی‌های انتخاب شده برای نشستن دانشجویان به شکل

$$c_۱, c_۲, \ldots, c_{۱۵۱},$$

هستند. این اعداد همراه با

$$c_۱ + ۱, c_۲ + ۱, \ldots, c_{۱۵۱} + ۱,$$

روی هم ۳۰۲ عدد هستند که حداقل آنها ۱ و حداکثر آنها ۳۰۱ است. بنا بر شکل دوم اصل لانه کبوتر، حداقل دو عدد از این ۳۰۲ عدد مساویند و تنها حالت ممکن برای این تساوی این است که i و j متمایزی وجود داشته باشند به طوری که $c_i = c_j + ۱$. به این ترتیب خواسته مساله برآورده می‌شود. $\diamondsuit$

مثال ۳۴.۳ اسم ۸۰ کالا در فهرست کالاهای یک انبار موجود بوده و در مقابل هر کالا یکی از جمله‌های «موجود است» یا «موجود نیست» نوشته شده است. اگر در این انبار تنها ۴۵ قلم از کالاهای فهرست شده موجود باشند، نشان دهید که حداقل دو قلم کالا از این فهرست وجود دارند، که در انبار موجود بوده و اختلاف شماره ردیف آنها در این فهرست ۹ است.

حل : فرض کنید a_i شماره ردیف کالای i موجود در انبار است که در آن i عددی بین ۱ و ۴۵ است. اعداد زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{llll} a_۱, & a_۲, & \ldots, & a_{۴۵} \\ a_۱ + ۹, & a_۲ + ۹, & \ldots, & a_{۴۵} + ۹ \end{array}$$

مقادیر این اعداد بین ۱ تا ۸۹ است (چرا). بنا بر شکل دوم اصل لانه کبوتر، حداقل دو عدد از این ۹۰ عدد با هم مساویند. بنابراین حداقل برای برخی i و j، اعداد a_i و a_j وجود دارند به طوری که

$$a_i = a_j + ۹ \Rightarrow a_i - a_j = ۹,$$

که این خواسته مثال است. $\diamondsuit$

اصل لانه کبوتر ــ شکل سوم:

فرض کنید f یک تابع از مجموعه متناهی X به روی مجموعه متناهی Y است و $|X| = n$ و $|Y| = m$ و $k = \lceil \frac{n}{m} \rceil$. در این صورت حداقل k مقدار $x_۱, x_۲, \cdots, x_k \in X$ موجودند به طوری که

$$f(x_۱) = f(x_۲) = \cdots = f(x_k).$$

برهان: فرض کنید $Y = \{y_۱, y_۲, \ldots, y_m\}$ و حکم نادرست است. در این صورت حداکثر $k - ۱$ مقدار $x \in X$ موجودند به طوری که $f(x) = y_j$ و $۱ \leq j \leq m$. بنابراین، حداکثر $m(k-۱)$ عضو در حوزه تعریف تابع f وجود دارند. ولی

$$m(k-۱) = m\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor < m\frac{n}{m} = n,$$

که یک تناقض است. پس حکم قضیه برقرار است.

مثال ۳۵.۳ نشان دهید در یک گروه ۶ نفری، یا سه نفر با هم دوست هستند یا سه نفر با هم بیگانه‌اند (ممکن است هر دو حالت نیز برقرار باشند!).

حل : افراد را $p_۱, p_۲, \ldots, p_۶$ نام‌گذاری می‌کنیم. هر یک از پنج زوج

$$(p_۱, p_۲),\ (p_۱, p_۳),\ (p_۱, p_۴),\ (p_۱, p_۵),\ (p_۱, p_۶),$$

صفت دوست‌بودن یا بیگانه بودن را دارند. با استفاده از شکل سوم اصل لانه کبوتر، حداقل تعداد $۳ = \lceil \frac{۵}{۲} \rceil$ زوج از آنها هم‌صفت هستند، یعنی سه زوج مانند

$$(p_۱, p_i),\ (p_۱, p_j),\ (p_۱, p_k),$$

موجود هستند که هر سه زوج صفت دوست بودن دارند و یا صفت بیگانه بودن. فرض کنید هر سه، صفت دوست بودن دارند. اگر هر یک از سه زوج

$$(p_i, p_j),\ (p_i, p_k),\ (p_j, p_k),$$

صفت دوست بودن داشته باشند ، آنگاه هر دو نفر همراه با p_i نیز با هم دوست هستند و حکم برقرار است. در غیر این صورت، هر سه نفر از زوج‌های فوق با هم بیگانه‌اند. $\diamondsuit$

تمرین۵.۳

۱. فرض کنید X یک مجموعه $n + ۲$ عضوی از مجموعه $\{۱, ۲, \ldots, ۲n + ۱\}$ بوده و m بزرگ‌ترین عضو X است. نشان دهید اعدادی مانند i و j در X موجودند به طوری که $i + j = m$.

۲. دنبالهٔ $a_۱, a_۲, \ldots, a_{n^۲+۱}$ از $n^۲ + ۱$ عدد متمایز را در نظر بگیرید. نشان دهید زیردنباله‌ای اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی $n + ۱$ عضوی از این دنباله موجود است.

۳. نشان دهید در یک گروه ده نفری که سن همه آنها اعداد صحیح است، حداقل دو نفر وجود دارند که اختلاف سن آنها یا مجموع سن آنها، مضربی از ۱۶ است.

۴. نشان دهید در بسط اعشاری یک عدد گویا، بلوکی از اعداد تکرار می‌شوند.

۵. دوازده بازیکن بسکتبال با شماره پیراهن از ۱ تا ۱۲ دو دایره وسط زمین به ترتیب دلخواه ایستاده‌اند. نشان دهید حداقل سه بازیکن مجاور وجود دارند به طوری که مجموع شماره پیراهن‌های آنها بیش از بیست است.

۶. در تمرین قبلی، اگر تعداد چهار بازیکن مجاور در نظر گرفته شوند، برآوردی برای مجموع شماره پیراهن آنها بیابید و ادعای خود را ثابت کنید.

۷. فرض کنید f یک تابع یک به یک از مجموعه $X = \{۱, ۲, \ldots, n\}$ به روی X بوده و $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$ ترکیب تابع f به تعداد k مرتبه است. نشان دهید اعداد متمایز i و j موجود هستند به طوری که برای تمامی مقادیر $x \in X$، رابطه $f^i(x) = f^j(x)$ برقرار است. همچنین نشان دهید برای عددی صحیح و مثبت مانند k و برای هر $x \in X$ رابطه $f^k(x) = x$ برقرار است.

۸. یک شبکه ۹×۳ شامل ۲۷ مربع هم اندازه داده شده است که هر مربع با یکی از دو رنگ سیاه یا سفید رنگ آمیزی شده است. نشان دهید این صفحه شامل یک مستطیل غیربدیهی (نه به صورت $k \times ۱$ یا $۱ \times k$) است که هر چهار گوشهٔ آن هم رنگ هستند.

۹. ۷۶ نقطه در یک آرایه ۱۹×۴ قرار گرفته و هر کدام از آنها به یکی از سه رنگ قرمز، آبی و زرد است. نشان دهید مربعی غیربدیهی وجود دارد که چهار راس آن همرنگ هستند.

۱۰. فرض کنید تعداد p عدد یک و تعداد q عدد صفر در محیط یک دایره به ترتیب دلخواه قرار داده شوند به طوری که سه عدد p، q و k اعداد صحیح مثبتی هستند که در رابطهٔ $p \geq kq$ صدق می‌کنند. ثابت کنید هر ترتیب دلخواه، شامل k عدد متوالی یک است.

۱۱. از بین اعداد $\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۹۹, ۱۰۰\}$، ۵۱ عدد به دلخواه انتخاب شده‌اند. نشان دهید از این اعداد انتخاب شده، حداقل دو عدد وجود دارند که عامل اول مشترک ندارند (نسبت به هم اول هستند).

۱۲. (**قضیه اِردوش**[۳]) از بین اعداد $\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۹۹, ۱۰۰\}$، ۵۱ عدد به دلخواه انتخاب شده‌اند. نشان دهید از این اعداد انتخاب شده، حداقل دو عدد وجود دارند که یکی بر دیگری قابل قسمت است.

۱۳. ثابت کنید در بین هر ۹ عدد حقیقی، دو عدد مانند a و b موجود هستند که در رابطه

$$۰ < \frac{a-b}{۱+ab} < \sqrt{۲} - ۱$$

صدق می‌کنند.

۱۴. یازده عدد از مجموعه $\{۱, ۲, \ldots, ۹۹, ۱۰۰\}$ انتخاب شده‌اند. نشان دهید دو زیرمجموعه جدا از هم از این مجموعه ۱۱ عضوی وجود دارند طوری که مجموع اعداد آن دو زیرمجموعه، مساوی است.

۱۵. نُه نقطه متمایز با مختصات صحیح در فضای سه بعدی در نظر بگیرید. ثابت کنید پاره‌خطی وجود دارد که نقاط انتهایی آن از این ۹ نقطه انتخاب شده‌اند و نقطه‌ای با مختصات صحیح روی این پاره خط وجود دارد.

۱۶. نشان دهید در یک عدد ۱۶ رقمی، دنباله‌ای از ارقام این عدد وجود دارد که مربع کامل است.

۱۷. در یک کنفرانس، ۱۷ ریاضیدان شرکت کرده‌اند که به پنج زبان مختلف صحبت می‌کنند. نشان دهید حداقل چهار نفر از ۱۷ نفر به یک زبان صحبت می‌کنند.

۱۸. پنج نقطه در درون یک مربع به طول ۲ انتخاب می‌شوند. نشان دهید حداقل دو نقطه از این پنج نقطه به فاصله کمتر از $\sqrt{۲}$ از یکدیگر قرار دارند.

[۳] Paul Erdös (1913 – 1996)

فصل ۴

گراف

مفهوم گراف در سال ۱۷۳۶ توسط اویلر با طرح راه حلی برای مساله پل گونیسبرگ[۱] ارائه شد. در این فصل ابتدا با مفاهیم مقدماتی گراف آشنا می‌شویم. سپس گراف‌های خاصی را بررسی کرده و در پایان برخی کاربردهای عملی از نظریه گراف را ملاحظه می‌کنیم. علاقمندان به نظریه گراف می‌توانند از منابع تخصصی‌تر مانند [۶، ۸] مراجعه کنند.

۱.۴ متعارف سازی

فرض کنید V یک مجموعه ناتهی و $E \subseteq V \times V$ هستند؛ زوج $G = (V, E)$ را یک **گراف** می‌نامند. V را مجموعه راس‌ها و هر عضو آن را یک **راس**، و مجموعه E را مجموعه یال‌ها و هر عضو آن را یک **یال** می‌گویند. اگر ترتیب قرار گرفتن راس‌ها مهم باشد، گراف را **گراف جهت‌دار** می‌نامند و یال از راس $v_۱$ به راس $v_۲$ را با $e = (v_۱, v_۲)$ نشان می‌دهند. در غیر این صورت، گراف را بدون جهت می‌نامند و یال از راس $v_۱$ به راس $v_۲$ را با $e = \{v_۱, v_۲\}$ نمایش می‌دهند.

مثال ۱.۴ فرض کنید

$$\begin{aligned} V &= \{a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵\}, \\ E &= \{(a_۱, a_۱), (a_۱, a_۲), (a_۱, a_۴), (a_۱, a_۳)\}. \end{aligned}$$

در این صورت، زوج $G = (V, E)$ یک گراف جهت‌دار است. $\diamond$

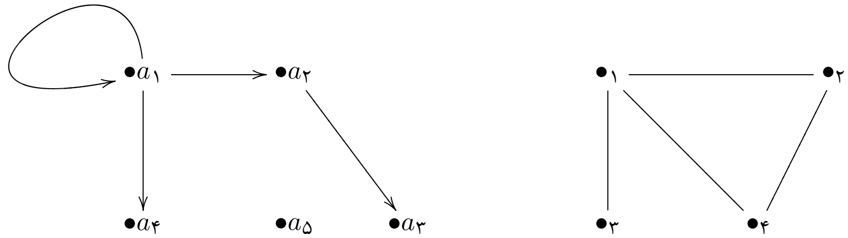
مثال ۲.۴ فرض کنید

$$\begin{aligned} V &= \{۱, ۲, ۳, ۴\}, \\ E &= \{\{۱, ۲\}, \{۱, ۳\}, \{۱, ۴\}, \{۲, ۴\}\}. \end{aligned}$$

در این صورت، زوج $G = (V, E)$ یک گراف بدون جهت است. $\diamond$

---

[۱] Königsberg



شکل ۱.۴: نمایش تصویری گراف مثال‌های ۱.۴ و ۲.۴

هر گراف را می‌توان به شکل هندسی نمایش داد. برای این کار، به هر راس نقطه‌ای از صفحه را متناظر می‌کنیم و اگر یالی بین دو راس موجود باشد، دو راس متناظر را با خطی به هم وصل می‌کنیم. در صورتی که گراف جهت‌دار باشد، این جهت را با فلش مشخص می‌کنیم. نمایش هندسی گراف‌های ارائه شده در مثال‌های ۱.۴ و ۲.۴ در شکل ۴.۱ رسم شده‌اند.

دو راس u و v از گراف $G = (V, E)$ را **مجاور** گویند هرگاه با یالی به هم وصل شده باشند؛ یعنی $e = (u, v)$ یالی در E باشد. در این صورت گویند یال e دو راس u و v را به هم وصل می‌کنند (راس‌های u و v روی یال e قرار دارند). در مثال ۲.۴، دو راس ۱ و ۴ مجاور هستند در حالی که راس‌های ۳ و ۴ مجاور نیستند.

هرگاه بین دو راس بیش از یک یال وجود داشته باشد، آن یال‌ها را **موازی** گویند. همچنین به یالی که یک راس را به خودش وصل کند **طوقه** گویند (در مثال ۱.۴، یالی که راس a را به خودش متصل کرده است ملاحظه کنید). اگر در گرافی یال‌های موازی و طوقه وجود نداشته باشد؛ آن را **گراف ساده** می‌گویند. در غیر این صورت آن را **چندگراف** می‌نامند. در این فصل درباره گراف‌های ساده صحبت می‌کنیم مگر آن که تصریح شود.

تعداد راس‌های یک گراف را **مرتبه** و تعداد یال‌های آن را **اندازه** گراف می‌نامند. یک گراف از مرتبه p و اندازه q را (اگر مرتبه و اندازه آن مهم باشد) (p, q)ــ گراف می‌نامند.

برای راس v از گراف $G = (V, E)$، **همسایگی** $\mathcal{N}(v)$ را به صورت

$$\mathcal{N}(v) = \{u \in V| \ \{u, v\} \in E\},$$

تعریف می‌کنند. تعداد اعضای همسایگی $\mathcal{N}(v)$ را **درجه** راس v نامیده و با $\deg v$ نشان می‌دهند. واضح است که درجه هر راس با تعداد یال‌هایی که آن راس روی آنها قرار دارد؛ برابر است. اگر گرافی طوقه داشته باشد، راس واقع روی هر طوقه را از درجه دو در نظر می‌گیریم. واضح است که برای هر راس v در یک گراف ساده، نامساوی

$$۰ \leq \deg v \leq p - ۱,$$

برقرار است. اگر درجه راسی صفر باشد آن راس را **منفرد** و اگر درجه آن یک باشد آن را **راس انتهایی** یا راس **معلق** گویند. در این صورت یال متناظر با راس معلق را یال معلق می‌نامند. در مثال ۱.۴، راس $a_۵$ راس منفرد و راس‌های $a_۳, a_۴$ معلق هستند.

قضیه بعدی در مورد مجموع درجه‌های راس‌های یک گراف صحبت می‌کند. اثبات آن بر این اساس استوار است که هر یال در محاسبه مجموع درجه‌های راس‌ها دو بار شمارش می‌شود.

قضیه دست دادن

گراف G از مرتبه p و اندازه q را در نظر بگیرید. اگر $V = \{v_۱, v_۲ \dots, v_p\}$ باشد، آنگاه

$$\sum_{i=۱}^{p} \deg v_i = ۲q.$$

اگر در یک مهمانی p نفر حضور داشته باشند و دو به دو با هم دست دهند (لازم نیست همه با هم دست دهند) در این صورت تعداد دست‌هایی که به هم برخورد می‌کنند، زوج است.

نتیجه ۳ *تعداد راس‌های از درجه فرد در گراف* $G = (V, E)$ *زوج است.*

برهان: فرض کنید V_e و V_o به ترتیب مجموعه راس‌های از درجه زوج و فرد هستند. آنگاه

$$\sum_{v\in V} \deg v = \sum_{v\in V_e} \deg v + \sum_{v\in V_o} \deg v = ۲q,$$

که در آن q مرتبه G است. بنابراین

$$\sum_{v\in V_o} \deg v = ۲q - \sum_{v\in V_e} \deg v = ۲k,$$

و این برهان را کامل می‌کند.

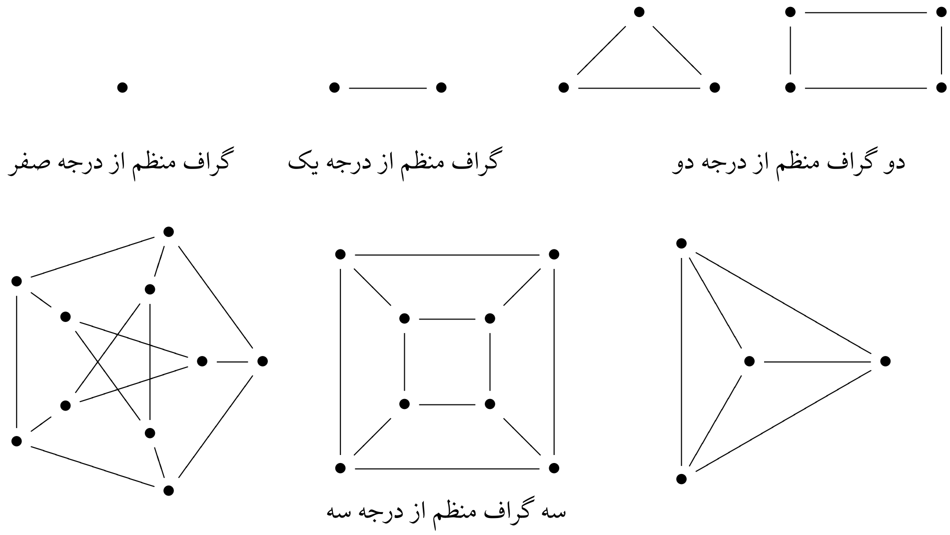
اگر دو یال در گراف $G = (V, E)$ راس مشترکی داشته باشند آنها را **یال‌های مجاور** گویند. دو یال $\{۱, ۴\}$ و $\{۲, ۴\}$ در مثال ۲.۴ با هم مجاور هستند.

گراف $G = (V, E)$ را **منظم** از درجه r گویند هرگاه درجه هر راس r باشد. گراف منظم از درجه‌های صفر، یک و تعدادی گراف منظم از درجه‌های دو و سه در شکل ۴.۲ آورده شده‌اند.

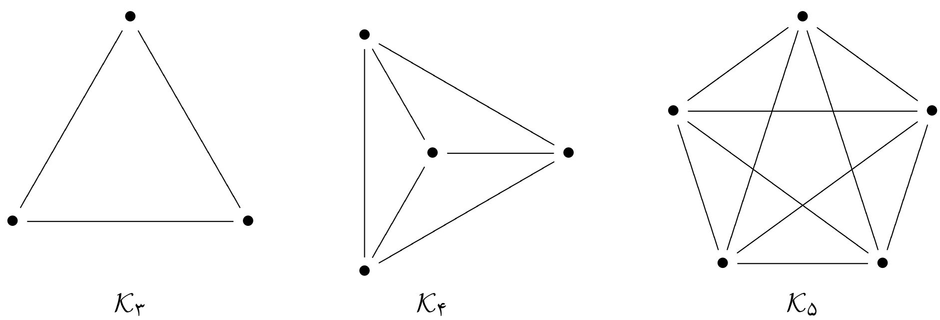
یک گراف از مرتبه n را **کامل** گویند هرگاه هر دو راس دلخواه آن مجاور باشند. گراف کامل از مرتبه n را با $\mathcal{K}_n$ نشان می‌دهند. در این صورت درجه هر راس $n - ۱$ بوده و این گراف، یک گراف $(n - ۱)$ـ منظم است. تعداد یال‌های گراف کامل با n راس، $m = \frac{n(n-۱)}{۲}$ است. در شکل ۴.۳ گراف‌های کامل $\mathcal{K}_۳$، $\mathcal{K}_۴$ و $\mathcal{K}_۵$ رسم شده‌اند.

متمم گراف $G(V, E)$ که آن را با $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})$ نشان می‌دهند؛ گرافی است که در آن $V = \overline{V}$ و یال (u, v) در $\overline{E}$ قرار دارد اگر و فقط اگر $(u, v) \notin E$. در شکل ۴.۴ نمونه‌ای از گراف G و متمم آن $\overline{G}$ آورده شده است.

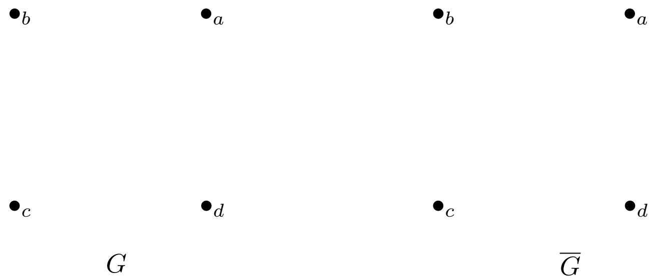
گراف $G = (V, E)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید بتوان مجموعه راس‌های گراف را به دو مجموعه جدا از هم $V_۱$ و $V_۲$ افراز کرد به طوری که هر یال از G یک راس از مجموعه $V_۱$ را به یک راس از مجموعه $V_۲$ وصل کند. به عبارت دیگر بین راس‌های $V_۱$ و همچنین بین راس‌های $V_۲$ یالی موجود نباشد. چنین گرافی را **گراف دوبخشی** نامیده و با $G(V_۱, V_۲)$ نشان می‌دهند.



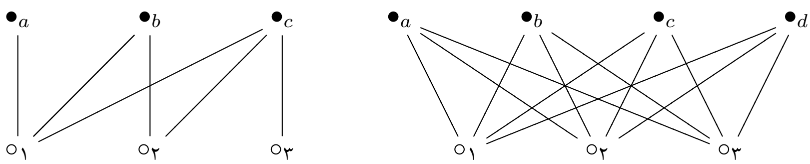
شکل ۲.۴: گراف‌های منظم از درجه های صفر، یک، دو و سه



شکل ۳.۴: گراف‌های کامل $\mathcal{K}_۳$، $\mathcal{K}_۴$ و $\mathcal{K}_۵$



شکل ۴.۴: گراف‌های G و متمم آن $\overline{G}$



گراف دوبخشی ناکامل

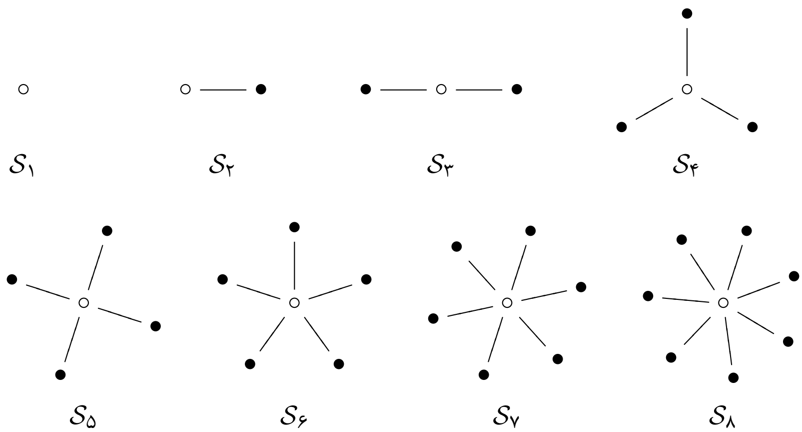
گراف دوبخشی کامل $\mathcal{K}_{۳,۴} = \mathcal{K}_{۴,۳}$

شکل ۵.۴: نمونه‌هایی از گراف دوبخشی

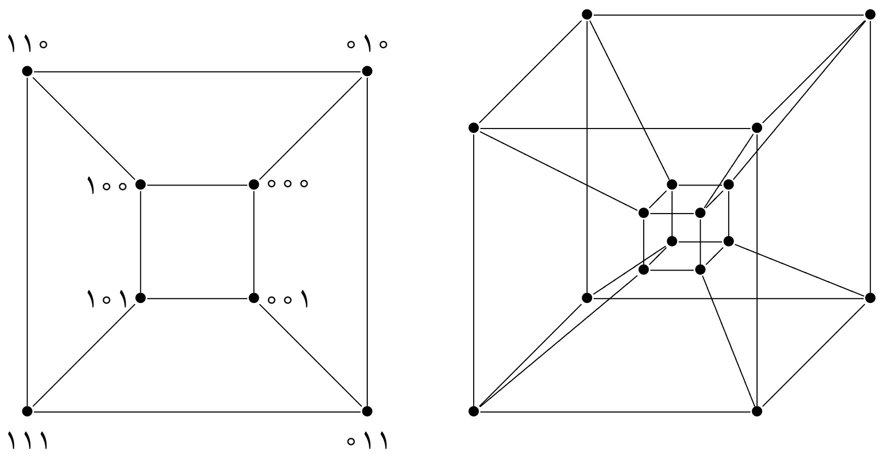
تاکید می‌کنیم که در یک گراف دوبخشی لزوماً از هر راس در $V_۱$ به هر راس در $V_۲$ یالی وجود ندارد. اگر چنین حالتی اتفاق افتد، گراف حاصل را **گراف دوبخشی کامل** نامیده و با $\mathcal{K}_{m,n}$ نشان می‌دهند که در آن m تعداد اعضای $V_۱$ و n تعداد اعضای $V_۲$ است. در شکل ۴.۵ دو نمونه از گراف‌های دوبخشی ارائه شده‌اند. یک گراف دوبخشی از نوع $\mathcal{K}_{۱,m-۱} = \mathcal{S}_m$ را **گراف ستاره‌ای** می‌نامند (شکل ۴.۶ را نگاه کنید).

مثال ۳.۴ در بین گراف‌های دوبخشی، گراف‌های جالبی وجود دارند که آنها را k**ـ مکعب** می‌نامند و با $\mathcal{Q}_k$ نشان می‌دهند. kـ مکعبِ $\mathcal{Q}_k$، گرافی است که راس‌های آن متناظر با kـ تایی $(a_۱, a_۲, \ldots, a_k)$ است که در آن هر a_i یک یا صفر است. بین دو راس یک یال وجود دارد اگر و فقط اگر دو kـ تایی متناظر فقط در یک مولفه متمایز باشند. شکل ۴.۷ دو گراف ۳ـ مکعب و ۴ـ مکعب را نشان می‌دهد. هر kـ مکعب ۲^k راس و $k۲^{k-۱}$ یال دارد که یک گراف منظم از درجه k است. kـ مکعب‌ها کاربردهای زیادی دارند از جمله کاربردهای آن در نظریه کدگذاری، کدهای گری[۲] هستند که اولین بار برای انتقال داده‌ها در تلویزیون‌های کابلی استفاده شد [۱۴].

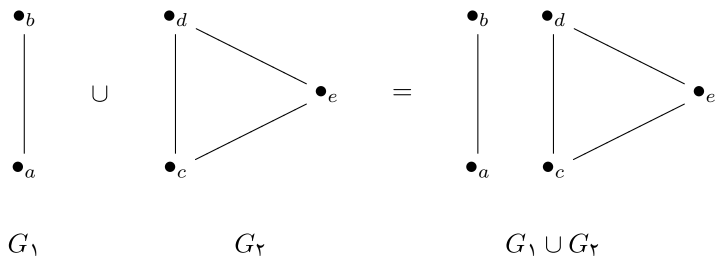
[۲] Gray Codes



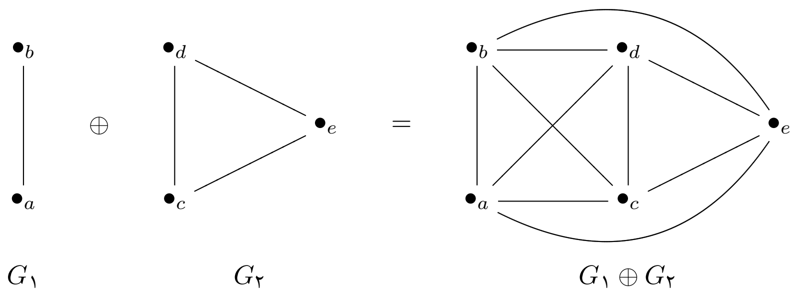
شکل ۶.۴: گراف ستاره‌ای



شکل ۷.۴: گراف ۳ـ مکعب (سمت چپ) و گراف ۴ـ مکعب (سمت راست)



شکل ۸.۴: اجتماع دو گراف



شکل ۹.۴: مجموع دو گراف

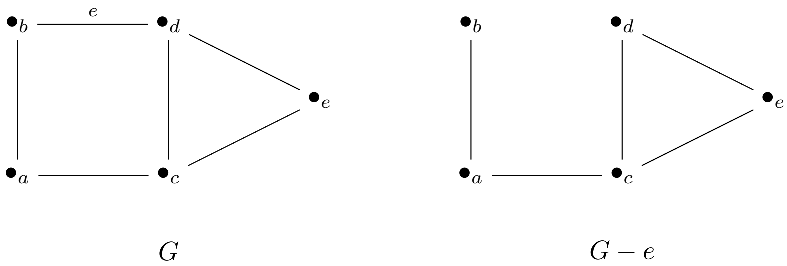
ساختن گراف از روی گراف‌های دیگر

روش‌های مختلفی برای ساختن گراف جدید از روی دو گراف داده شده و یا ساختن از روی یک گراف وجود دارد. در این جا چند روش مختلف را مرور می‌کنیم.

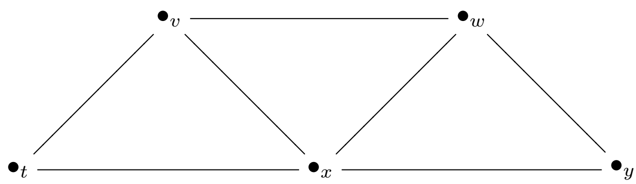
۱. **اجتماع دو گراف** گراف‌های $G_۱ = (V_۱, E_۱)$ و $G_۲ = (V_۲, E_۲)$ را در نظر بگیرید که در آنها $V_۱$ و $V_۲$ دو مجموعه جدا از هم هستند. اجتماع این دو گراف که با $G_۱ \cup G_۲$ نشان داده می‌شود گرافی است که مجموعه راس‌های آن $V_۱ \cup V_۲$ و مجموعه یال‌های آن $E_۱ \cup E_۲$ است (شکل ۴.۸ را نگاه کنید).

۲. **مجموع دو گراف** گراف‌های $G_۱ = (V_۱, E_۱)$ و $G_۲ = (V_۲, E_۲)$ داده شده اند. مجموع دو گراف با نماد $G_۱ \oplus G_۲$ نشان داده می‌شود که در آن $V_۱ \cup V_۲$ مجموعه راس‌های آن بوده و مجموعه یال‌های آن $E_۱ \cup E_۲$ به همراه یال‌هایی است که هر راس $V_۱$ را به هر راس $V_۲$ وصل می‌کند (شکل ۴.۹ را نگاه کنید).

۳. **حذف یک یال (مجموعه‌ای از یال‌ها)** گرافی که از حذف یال e از گراف G به دست می‌آید را با $G - e$ نشان می‌دهیم (شکل ۴.۱۰ را نگاه کنید). لازم به ذکر است که در حذف یک یال، راس‌های متناظر آن حذف نمی‌شوند. اگر F زیرمجموعه‌ای از یال‌ها باشد، نماد $G - F$ برای نشان دادن گرافی به کار می‌رود که از حذف یال‌های واقع در F از گراف G باقی می‌ماند. برای



شکل ۱۰.۴: گراف حاصل از حذف یال e.



شکل ۱۱.۴: گراف $G(V,E)$ در مثال ۴.۴.

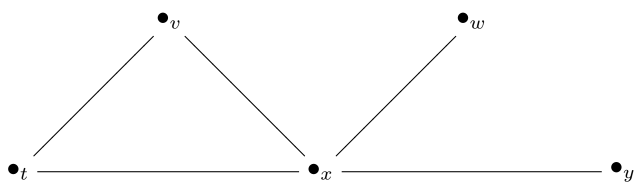
توصیف کاربردی از حذف یال‌ها، می‌توان حذف F از گراف G را معادل با حذف تعدادی از خیابان‌های ارتباطی از شبکه خیابان‌های یک شهر در نظر گرفت.

مثال ۴.۴ فرض کنید گراف $G = (V,E)$ به صورت شکل ۴.۱۱ داده شده است. در این گراف مجموعه راس‌ها $V = \{t,v,w,x,y\}$ و مجموعه یال‌ها

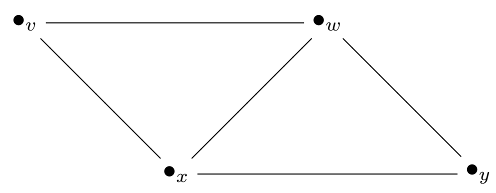
$$E = \{\{t,v\},\{t,x\},\{v,x\},\{v,w\},\{w,x\},\{w,y\},\{x,y\}\},$$

است. با فرض $F = \{\{v,w\},\{w,y\}\}$، گراف $G - F$ به صورت شکل ۴.۱۲ است.

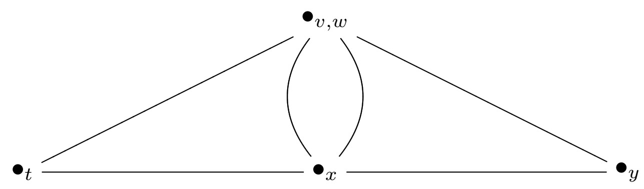
۴. **حذف یک راس (مجموعه‌ای از راس‌ها)** اگر v راسی از گراف G باشد، با حذف این راس از گراف G، گراف $G - v$ به دست می‌آید. توجه کنید که با حذف راس v تمامی یال‌هایی که این



شکل ۱۲.۴: گراف $G(V,E) - F$ در مثال ۴.۴.



شکل ۱۳.۴: گراف $G(V, E) - S$ در مثال ۵.۴.



شکل ۱۴.۴: گراف منقبض شده در مثال ۴.

راس روی آنها قرار دارد نیز از گراف حذف می‌شوند. اگر S مجموعه‌ای دلخواه از راس‌های V باشد، گراف $G - S$ از حذف این راس‌ها و (یال‌های منتهی به این راس‌ها) از گراف G حاصل می‌شود.

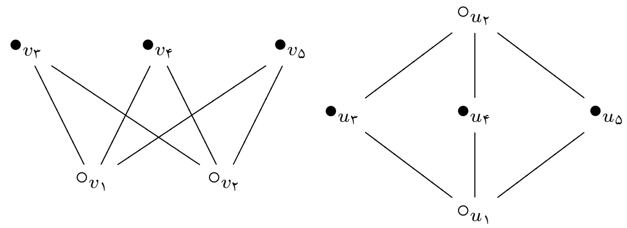
مثال ۵.۴ برای گراف داده شده در مثال ۴.۴، فرض کنید $S = \{t\}$. در این صورت $G - S$ به صورت شکل ۴.۱۳ است.

۵. **انقباض** گراف G داده شده است. اگر بعد از حذف یال $e = \{u, v\}$ دو راس u و v را بر هم منطبق کنیم، گراف جدیدی به دست می‌آید که آن را منقبض شده گراف G نامیده و با G_e نشان می‌دهند.

مثال ۶.۴ گراف G در مثال ۴.۴ را در نظر بگیرید. با حذف یال $e = \{v, w\}$ و منطبق کردن دو راس w و v بر هم گراف منقبض شده به دست می‌آید. با فرض ساده بودن گراف، از ایجاد یال‌های موازی جلوگیری می‌شود (شکل ۴.۱۴ را نگاه کنید).

۶. **زیرگراف** اگر $G = (V, E)$ یک گراف باشد، گراف $G_1 = (V_1, E_1)$ را زیرگراف G گویند هرگاه $\phi \neq V_1 \subseteq V$ و $E_1 \subseteq E$ به طوری که هر یال در E_1 راس‌هایی از V_1 را به هم متصل کند. توجه کنید گراف‌هایی که از حذف یال (یال‌ها) و راس (راس‌ها) از روی گراف G حاصل می‌شوند، زیرگراف‌های تولید شده از G هستند ولی گراف تولید شده با انقباض، یک زیرگراف از G نیست.

۷. **زیرگراف القا شده** گراف $G = (V, E)$ و $S \subseteq V$ را در نظر بگیرید. زیرگراف القا شده توسط S زیرگرافی مانند $G_S = (S, E_S)$ است به طوری که E_S آن یال‌هایی از E است که راس‌های S را به هم وصل می‌کنند.



شکل ۴.۱۵: نمونه‌ای از دو گراف یکریخت

یکریختی در گراف‌ها

دو گراف $G_1 = (V_1, E_1)$ و $G_2 = (V_2, E_2)$ را در نظر بگیرید. این دو گراف را **یکریخت** گویند هرگاه نگاشت یک به یک f بین V_1 و V_2 موجود باشد به طوری که

$$\{u, v\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E_2.$$

توجه داشته باشید که با افزایش تعداد راس‌ها و یال‌های گراف‌ها، تشخیص یکریختی آنها مشکل می‌شود. با توجه به تعریف یکریختی دو گراف، نتایج بعدی بدیهی هستند.

شرط لازم برای یکریختی گراف‌ها:

تعداد راس‌های دو گراف یکریخت و همچنین تعداد یال‌های آنها مساوی هستند.

مجدداً تاکید می‌کنیم که این شرط برای یکریختی دو گراف لازم بوده ولی کافی نیست. برای یکریختی دو گراف، برای هر راس دلخواه $v \in V_1$ باید رابطه $\deg v = \deg f(v)$ برقرار باشد. چنین تناظر یک به یک را تناظر **حافظ درجه** گوییم.

مثال ۴.۷ دو گراف نشان داده شده در شکل ۴.۱۵ یکریخت هستند. برای بررسی یکریختی این دو گراف تناظر f را به صورت

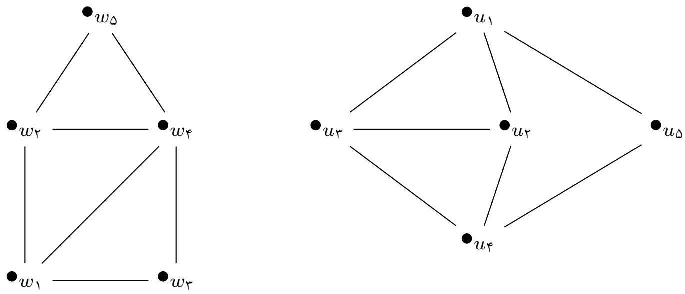
$$f = \{(v_i, u_i), i = 1, \ldots, 5\},$$

در نظر می‌گیریم. با استفاده از تناظر f، یکریختی این دو گراف را می‌توان تحقیق کرد (تحقیق کنید). $\diamondsuit$

مثال ۴.۸ دو گراف G_1 و G_2 داده شده در شکل ۴.۱۶ یکریخت نیستند. زیرا در گراف G_1 تنها یک راس از درجه دو (راس u_5) وجود دارد در حالی که در گراف G_2 دو راس از درجه دو (راس‌های w_1 و w_2) وجود دارند. بنابراین هیچ تناظری نمی‌توان بین راس‌های این دو گراف در نظر گرفت که «حافظ درجه» باشد. $\diamondsuit$

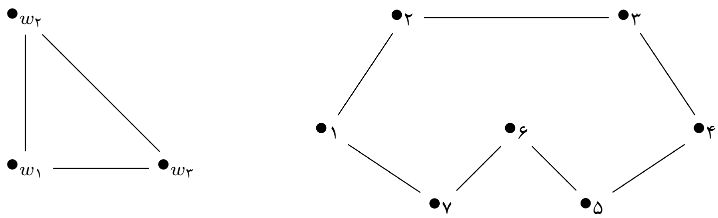
مدار و چرخ

گراف منظم از درجه دو را یک **مدار** گویند. یک مدار از مرتبه n را با $\mathcal{C}_n$ نشان می‌دهند (شکل ۴.۱۷ را نگاه کنید). گرافی که از روی $\mathcal{C}_{n-1}$ با وصل کردن هر راس آن به یک راس جدید مانند v به دست می‌آید را **چرخ** با n راس نامیده و با $\mathcal{W}_n$ نشان می‌دهند (شکل ۴.۱۸ را نگاه کنید).



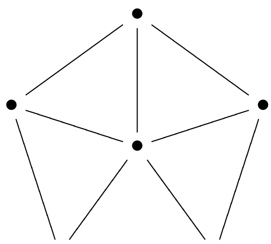
گراف G_2 گراف G_1

شکل ۱۶.۴: نمونه‌ای از دو گراف نایکریخت



گراف $\mathcal{C}_3$ گراف $\mathcal{C}_7$

شکل ۱۷.۴: نمونه‌ای از دو مدار



شکل ۱۸.۴: گراف چرخ $\mathcal{W}_6$

گذر، جاده و مسیر

گراف $G=(V,E)$ داده شده است. یک **گذر** دنباله‌ای متناهی از یال‌ها است که به صورت

$$\{v_0,v_1\},\{v_1,v_2\},\ldots,\{v_{m-1},v_m\},$$

نشان می‌دهند. در هر گذر دو یال متوالی در یک راس مشترک هستند (دو یال مجاور هستند). همچنین ممکن است یالی در آن تکرار شده باشد. به عبارت دیگر ممکن است در طی حرکت روی یال‌های یک گذر، راه طی شده را مجدداً طی کنیم. به این ترتیب هر گذر دنباله‌ای از راس‌ها را نیز مشخص می‌کند و می‌توان آن را به صورت دنباله‌ای از راس‌های

$$v_0,v_1,\ldots,v_{m-1},v_m,$$

نشان داد. در این صورت الزاماً راس‌ها از هم متمایز نیستند. در هر گذر، v_0 را راس آغازی و v_m را راس پایانی گویند. تعداد یال‌ها در یک گذر را **طول** آن گذر گویند.

گذر مفهوم کلی‌تری دارد. اگر در یک گذر یال تکراری وجود نداشته باشد آن را **جاده** می‌نامند. اگر شرط تکراری نبودن راس‌ها را نیز به آن اضافه کنیم (به جز احتمالاً راس‌های آغازی و پایانی) آن را **مسیر** گویند. یک مسیر را **بسته** گویند هرگاه دو راس آغازی و پایانی بر هم منطبق باشند. بنابراین، در حرکت روی یک مسیر هر راس یک بار ملاقات می‌شود و چون یال‌ها مجاور هستند؛ پس درجه هر راس در هر مسیر بسته دو است. هر مسیر بسته به طول سه را یک **مثلث** گویند و مسیر بسته به طول چهار را یک **مربع** نامند. هر مسیر بسته را یک **دور** گویند.

قضیه ۱.۴ *در گراف دوبخشی $G(V_1,V_2)$، طول هر دور زوج است.*

برهان: فرض کنید

$$v_1,v_2,\ldots,v_m,v_1,$$

یک دور در $G(V_1,V_2)$ است. بدون خللی در کلیت، فرض کنید $v_1\in V_1$. بنا بر دوبخشی بودن گراف، لازم است $v_1,v_3,\ldots\in V_1$ و $v_2,v_4,\ldots\in V_2$ باشند. پس $v_m\in V_2$ و بنابراین طول دور زوج است.

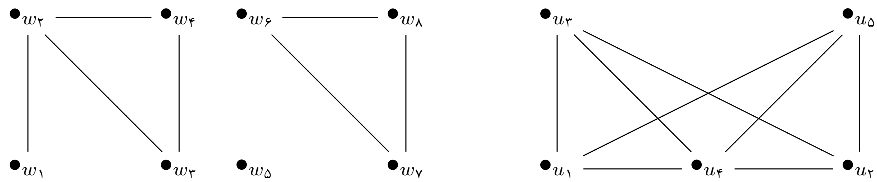
همبندی در گراف‌ها

گراف G را **همبند** گویند هرگاه بین هر دو راس دلخواه u و v در این گراف، مسیری موجود باشد. اگر گرافی همبند نباشد آن را **ناهمبند** گویند. هر گراف ناهمبند از اجزایی تشکیل شده است. هر یک از این اجزا را یک **مؤلفه** گویند.

بدیهی است که هر گراف ناهمبند حداقل از دو مؤلفه تشکیل شده است و هر گراف که فقط از یک مؤلفه تشکیل شود همبند است. در شکل ۴.۱۹ یک گراف همبند و یک گراف ناهمبند متشکل از سه مؤلفه رسم شده است.

قضیه ۲.۴ *گراف ساده G با n راس را در نظر بگیرید. تعداد مولفه‌های G را با k و تعداد یال‌های آن را با m نشان دهید. در این صورت*

$$n-k\le m\le \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1).$$



گراف ناهمبند با سه مولفه   گراف همبند

شکل ۱۹.۴: نمونه‌ای از گراف همبند و ناهمبند

برهان: *برای اثبات نابرابری سمت چپ از استقرا روی تعداد یال‌ها استفاده می‌کنیم. اگر G یالی نداشته باشد، حکم بدیهی است (تساوی برقرار است). اگر گراف G، m_0 یال داشته باشد با حذف هر یال ممکن است تعداد مولفه‌ها افزایش یابد. در این صورت بنا بر فرض استقرا*

$$n-(k+1) \leq m_0 - 1,$$

که از آن، رابطه $n-k \leq m_0$ نتیجه می‌شود. اگر تعداد مولفه‌ها افزایش نیابد آنگاه

$$n-k \leq m_0 - 1 < m_0.$$

در هر صورت، حکم برای تعداد m_0 نیز برقرار است.

برای اثبات نابرابری سمت راست، حکم برای $k=1$ بدیهی است. فرض کنید $k>1$ و هر مولفه G کامل است (زمانی تعداد یال‌های گراف G بیشترین است که هر مولفه آن کامل باشد). دو مولفه G_i و G_j به ترتیب با n_i و n_j راس را در نظر بگیرید که در آنها $n_i \geq n_j \geq 2$. اگر G_i و G_j را با گراف‌های کاملی به ترتیب با n_i+1 و n_j-1 راس عوض کنیم (یک راس از G_j حذف و به G_i ملحق کرده و شرط کامل بودن گراف‌های جدید را رعایت کنیم)؛ در این صورت تعداد راس‌ها تغییر نمی‌کند، در حالی که تعداد یال‌ها با رابطه

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[(n_i+1)n_i - n_i(n_i-1)\right]\\ &\qquad -\frac{1}{2}\left[n_j(n_j-1)-(n_j-1)(n_j-2)\right] = n_i - n_j + 1 > 1,\end{aligned}$$

تغییر می‌کند. پس تعداد یال‌ها در یک گراف ناهمبند از k مولفه، زمانی بیشترین است که یک مولفه آن کامل از درجه $n-k+1$ بوده و $k-1$ مولفه دیگر آن منفرد باشند. در این صورت، حداکثر تعداد یال‌ها $\frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$ است و به این ترتیب حکم ثابت می شود.

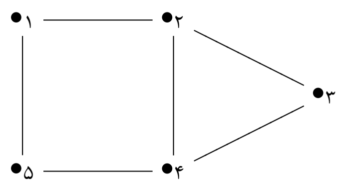
نتیجه ۴ (آزمون همبندی) *گراف ساده با n راس و بیش از $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ یال، همبند است (چرا؟).*

نتیجه ۵ (آزمون ناهمبندی) *گراف ساده با n راس و حداکثر $n-2$ یال، ناهمبند است (چرا؟).*

نمایش ماتریسی گراف‌ها

گراف G با راس‌های $1, 2, \ldots, n$ را در نظر بگیرید. **ماتریس همسایگی** برای گراف G با $\mathcal{A}$ نشان داده شده و عنصر a_{ij} در این ماتریس یک است هرگاه دو راس i و j مجاور باشند، در غیر این صورت، این عنصر صفر است.

مثال ۹.۴ گراف G به صورت



را در نظر بگیرید. ماتریس همسایگی این گراف

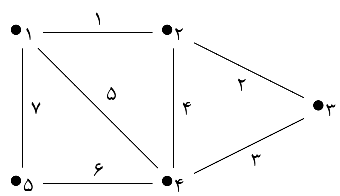
$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

است.

لازم به ذکر است که ماتریس همسایگی برای گراف‌های بدون جهت، متقارن است در حالی که این ماتریس برای گراف‌های جهت‌دار متقارن نیست.

گراف G با n راس و m یال در نظر بگیرید. **ماتریس وقوع** گراف G با $\mathcal{M}$ نشان داده می‌شود که در آن m_{ij} یک است اگر راس i روی یال j قرار داشته باشد. در غیر این صورت، این مولفه صفر است. ماتریس وقوع را ماتریس همسایگی راس‑ یال نیز می‌گویند.

مثال ۱۰.۴ گراف G به صورت



داده شده است. اعداد نوشته شده روی هر یال شماره آن را نشان می‌دهد. ماتریس وقوع این گراف

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

است. در این ماتریس، سطرها با یال‌های گراف و ستون‌ها با راس‌های گراف متناظر هستند.

تمرین ۱.۴

۱. گرافی با مجموعه راس‌های $V = \{u, v, w, x, y, z\}$ و یال‌های

$$E = \{\{u, w\}, \{u, z\}, \{v, w\}, \{w, x\}, \{w, y\}, \{w, z\}, \{x, z\}, \{y, z\}\},$$

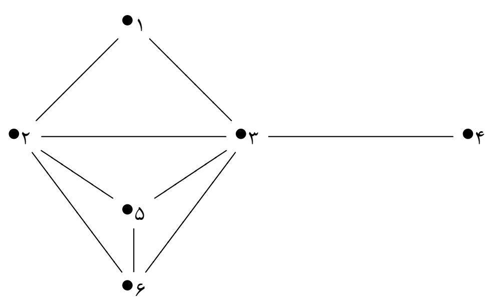
رسم کنید. مرتبه و اندازه این گراف چند است؟

۲. یک شیمی‌دان می‌خواهد مواد شیمیایی $c_۱, c_۲, \ldots, c_۷$ را حمل کند. در این حمل و نقل، به علت احتمال ترکیب شیمیایی مواد، امکان قرار دادن بعضی از مواد در کنار هم وجود ندارد. در شرایط خاص هر دو ماده $c_۱, c_۲, c_۳, c_۷$ می‌توانند با هم ترکیب شوند. همچنین دو ماده $c_۱$ و $c_۵$ می‌توانند با دو ماده $c_۴$ و $c_۶$ ترکیب شوند. گرافی رسم کنید که این روابط شیمیایی را توصیف کند. از این گراف استفاده کرده و حداقل جعبه‌های مورد نیاز برای بسته‌بندی و حمل این مواد را بیابید.

۳. ثابت کنید در هر گراف از مرتبه حداقل دو، دست کم دو راس با درجه مساوی وجود دارند.

۴. گرافی از مرتبه غیر از پنج مثال بزنید که در خاصیت «هر دو راس دلخواه آن در همسایگی دیگری باشد» صدق کند. گراف را رسم کرده و اندازه آن را بیابید و درجه هر راس را مشخص کنید.

۵. درجه راس‌ها در گراف



را مشخص کرده و مجموع درجه راس‌ها را تعیین کنید.

۶. گرافی از مرتبه پنج بسازید که درجه راس‌های آن ۴ ,۳ ,۲ ,۲ ,۱ است. اندازه گراف چند است؟

۷. دو عدد صحیح نامنفی m و n که همزمان صفر نیستند را در نظر بگیرید. نشان دهید همواره نمی‌توان گرافی داشت که m راس آن از درجه زوج و n راس آن از درجه فرد باشد.

۸. در یک گراف از مرتبه ۱۴ و انداره ۲۵، درجه هر راس ۳ یا ۵ است. این گراف چند راس از درجه ۳ دارد؟

۹. گراف G از مرتبه ۷ و اندازه ۱۰، شش راس از درجه a و یک راس از درجه b دارد. b چند است؟

۱۰. آیا یک گراف از مرتبه چهار می‌تواند سه راس از درجه ۳ و یک راس از درجه ۱ داشته باشد؟ چرا؟

۱۱. گراف‌های نایکریخت از مرتبه n و اندازه m با شرط $m+n \leq ۶$ را رسم کنید. کدام یک از این گراف‌ها ساده هستند؟

۱۲. فرض کنید هیچ دو یال گراف G مجاور نباشند. درجه راس‌های G چند است؟

۱۳. در گراف G از مرتبه n و اندازه m، k را کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت در نظر بگیرید که $k \geq \frac{۲m}{n}$. نشان دهید G یک راس از درجه حداقل k دارد.

۱۴. ثابت کنید در یک مهمانی نه نفری، امکان ندارد هر فرد دقیقاً با پنج نفر دیگر آشنا باشد.

۱۵. فرض کنید G گراف منظم از درجه k و k یک عدد فرد است. ثابت کنید اندازه G مضربی از k است.

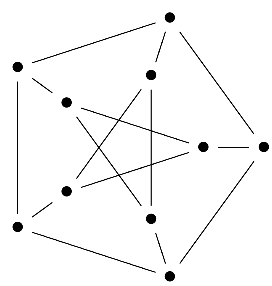
۱۶. ثابت کنید یک kـ مکعب ۲^k راس و $k۲^{k-۱}$ یال دارد.

۱۷. G را گرافی از مرتبه n و اندازه $n-۱$ بگیرید. ثابت کنید یا راسی از درجه یک وجود دارد و یا راس منفردی موجود است.

۱۸. کوچک‌ترین عدد صحیح n را بیابید که گراف کامل $\mathcal{K}_n$ حداقل از اندازه ۵۰۰ باشد.

۱۹. فرض کنید G گراف ساده منظم با n راس و ۲۴ یال است. n را پیدا کرده و گراف G را رسم کنید.

۲۰. گراف منظم از درجه ۳ به شکل

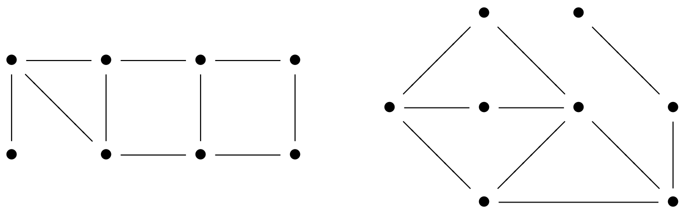


را **گراف پترسون** [۳] گویند. آیا این گراف دوبخشی است؟ چرا؟

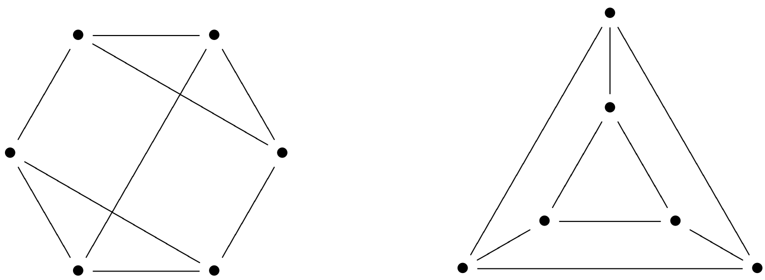
۲۱. مشخص کنید کدام زوج از گراف‌های زیر یکریخت هستند و چرا؟

Peterson[۳]

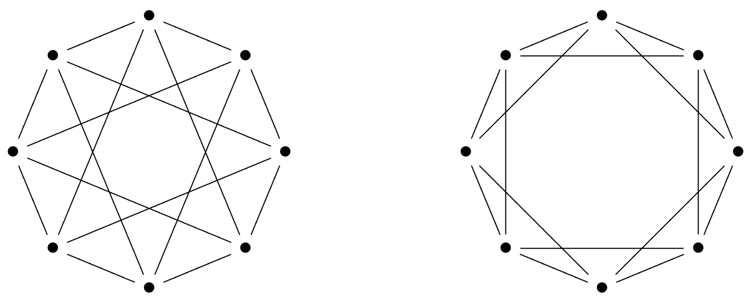
(آ)



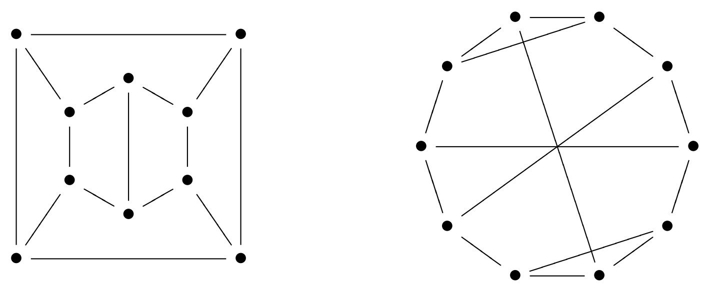
(ب)



(ج)

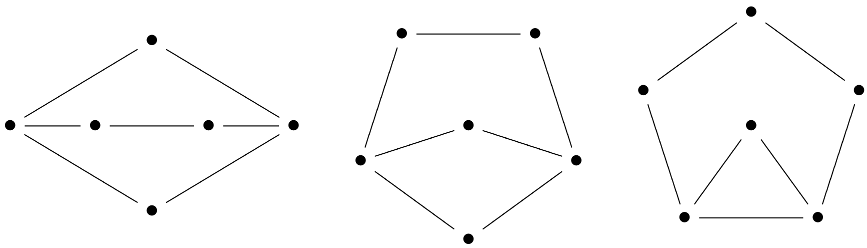


(د)

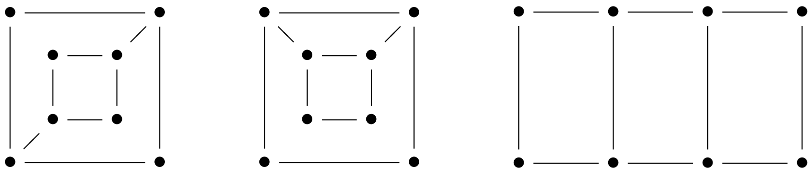


۲۲. در هر دسته از گراف‌های این مساله، تنها دو گراف یکریخت هستند. آنها را با بیان دلیل مشخص کنید. دلیل نایکریختی دیگران را نیز بیان کنید.

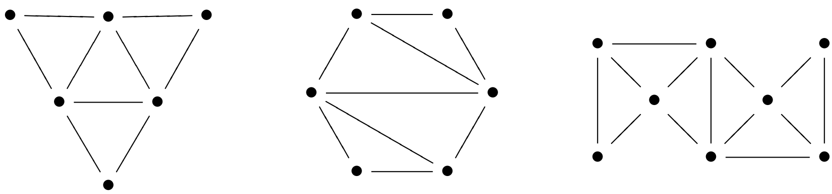
(آ)



(ب)



(ج)



۲۳. گراف‌های نایکریخت دوبخشی و کامل که حداکثر هفت راس دارند را مشخص کنید.

۲۴. دو گراف نایکریخت منظم از درجه سه با شش راس و نه یال بیابید.

۲۵. نشان دهید در ماتریس وقوع یک گراف ساده همبند، تعداد یک‌ها در هر سطر ۲ بوده و تعداد یک‌ها در هر ستون با درجه راس متناظر مساوی است.

۲۶. مجموع عناصر سطری (یا ستونی) ماتریس همسایگی چه چیزی را نشان می‌دهد؟

۲۷. نشان دهید اگر A ماتریس همسایگی راس‌های گراف G باشد، آنگاه در $A^2 = (a^2)_{ij}$، عنصر a_{ij}^2 تعداد مسیرهای واقع بین دو راس i و j که دقیقاً یک راس دیگر در این مسیر قرار دارد را نشان می‌هد. در مورد A^3 چه می‌توان گفت؟

۲۸. A ماتریس همسایگی راس‌های گراف G است. در مورد عناصر $A + A^2$ چه می‌توان گفت؟

۲۹. یکریختی دو گراف را بر اساس ماتریس‌های همسایگی راس‌های آنها تعریف کنید.

۳۰. ماتریس‌های همسایگی گراف‌های ناهمبند و دوبخشی چه خصوصیت‌هایی دارند؟

۳۱. ماتریس وقوع برای گراف ناهمبند چه خاصیتی دارد؟

۳۲. نشان دهید مجموع درایه‌های قطری توان دوم ماتریس همجواری هر گراف، دو برابر تعداد یال‌های آن است.

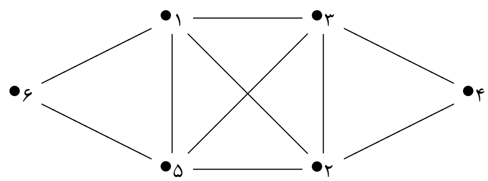
۲.۴ گراف‌های خاص

در این بخش دو نوع از گراف‌های خاص، گراف‌های اویلری (و نیمه اویلری) و گراف‌های هامیلتونی (و نیمه هامیلتونی) و کاربردهایی از آنها را مطالعه می‌کنیم.

گراف‌های اویلری و نیمه اویلری

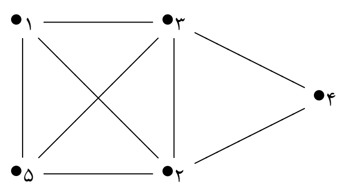
گراف همبند G را **اویلری** گویند هرگاه مسیر بسته‌ای موجود باشد که از هر یال این گراف فقط یک بار عبور کند. چنین مسیری را **مسیر اویلری** گویند. با حذف شرط بسته بودن مسیر، مسیر حاصل را **مسیر نیمه اویلری** و گراف متناظر را **گراف نیمه اویلری** می‌نامند. بنابراین، هر گراف اویلری نیمه اویلری است در حالی که ممکن است عکس آن برقرار نباشد.

مثال ۱۱.۴ گراف داده شده در شکل زیر



یک گراف اویلری است. زیرا مسیر اویلری بسته ۱, ۶, ۵, ۱, ۳, ۵, ۲, ۴, ۳, ۲, ۱ در آن وجود دارد.

مثال ۱۲.۴ گراف رسم شده در شکل زیر



نیمه اویلری است. زیرا می‌توان مسیر نیمه اویلری ۵, ۱, ۳, ۱, ۵, ۲, ۴, ۳, ۲, ۱ را در آن مشخص کرد.

قضیه ۳.۴ (قضیه اویلر) *اگر گراف G راس منفرد نداشته باشد، آنگاه اویلری است اگر و فقط اگر G همبند بوده و درجه هر راس زوج باشد.*

برهان: (لزوم شرط) *فرض کنیم گراف G اویلری است (مسیر اویلری در گراف G وجود دارد)، نشان می‌دهیم این گراف همبند بوده و درجه هر راس زوج است.*

اگر u و v دو راس دلخواه از گراف G باشند، آنگاه این راس‌ها روی یال‌های مشخصی قرار دارند (احتمالاً روی یک یال واقع نیستند)؛ زیرا گراف G راس منفرد ندارد. چون مسیر بسته اویلری از تمام

یال‌های گراف عبور می‌کند، پس این مسیر دو راس u و v را به هم وصل می‌کند. بنابراین گراف G همبند است.

برای اثبات زوج بودن درجه هر راس، فرض کنید u راس دلخواهی از G باشد. همچنین فرض کنید حشره‌ای در این راس قرار دارد که در روی یال‌ها در جهت مسیر اویلری حرکت می‌کند و در پایان مسیر دوباره به راس u برمی‌گردد. پس در طی حرکت خود، به همان تعداد که از راس u خارج می‌شود به همان تعداد نیز به این راس وارد می‌شود. پس درجه هر راس زوج است.

(کفایت شرط) *فرض کنید G یک گراف همبند بوده و درجه هر راس زوج است. با استفاده از روش الگوریتمی، مسیر بسته اویلری را می‌سازیم.*

راسی را به دلخواه انتخاب می‌کنیم (مثلاً u) و روی یال‌ها به دلخواه حرکت می‌کنیم به طوری که هیچ یال را بیش از یک بار طی نکنیم. این کار را تا آنجا ادامه می‌دهیم تا در راسی مانند v به بن‌بست برسیم. چون تمامی یال‌هایی که از راس v می‌گذرند قبلاً طی شده اند؛ اگر $v \neq u$، آنگاه تعداد دفعاتی که به راس v وارد شده‌ایم یک بار بیشتر از تعداد دفعاتی است که از این راس خارج شده‌ایم. در نتیجه درجه راس v فرد می‌شود که این با فرض مغایر است. پس یا بن‌بستی وجود ندارد و یا دوباره به نقطه شروع حرکت برمی‌گردیم.

اگر در این مسیر بسته راسی از گراف G طی نشده باشد، آنگاه هنوز یالی طی نشده وجود دارد. یال طی نشده‌ای که یک راس آن روی این مسیر بسته قرار دارد را در نظر گرفته و آن راس را w می‌نامیم. می‌توانیم به مداری طولانی‌تر با شروع از w و طی مسیر قبلی و برگشت مجدد به نقطه w و ادامه مسیر در جهت یال طی نشده برسیم. این الگوریتم را ***خروج از بن‌بست*** *می‌نامند.*

خروج از بن‌بست را تا آنجا ادامه می‌دهیم تا یک مسیر طولانی‌تر داشته باشیم و دیگر امکان اجرای مجدد الگوریتم خروج از بن‌بست وجود نداشته باشد. در این صورت مسیری پیدا کرده‌ایم که از تمامی راس‌ها و یال‌های گراف استفاده شده است. نشان می‌دهیم که این مسیر همان مسیر اویلری مورد نظر است. فرض کنید e یالی از گراف G با دو راس انتهایی x و y است. چون G همبند است، پس مسیری از u (راس آغازین) به x وجود دارد. مثلاً

$$u, u_1, u_2, \ldots, x,$$

یال $\{u, u_1\}$ باید روی مسیر مذکور قرار داشته باشد. در غیر این صورت، الگوریتم خروج از بن‌بست را در راس u اجرا می‌کنیم. پس راس u روی مسیر قرار دارد و یال $\{u_1, u_2\}$ نیز روی این مسیر قرار دارد؛ زیرا امکان اجرای الگوریتم خروج از بن‌بست در راس u_1 وجود ندارد. به همین ترتیب راس‌های $u_2, u_3, \ldots, x$ نیز روی مسیر قرار دارند و یال e که راس y را به راس x وصل می‌کند نیز روی مسیر قرار دارد. هرگاه امکان اجرای الگوریتم خروج از بن‌بست وجود نداشته باشد، آنگاه هر یال روی مسیر قرار دارد و مسیر به دست آمده اویلری است.

مثال ۱۳.۴ برای گراف مثال ۱۱.۴، یک مسیر بسته اویلری مشخص می‌کنیم. برای این کار از ماتریس همسایگی راس‌ها استفاده کرده و الگوریتم قضیه ۳.۴ را به شکل ماتریسی اجرا می‌کنیم. مزیت استفاده از شکل ماتریسی، امکان اجرای آن با رایانه است. توجه داشته باشید که ماتریس همسایگی به شماره‌گذاری راس‌های گراف وابسته است و اگر ترتیب شماره‌گذاری راس‌ها تغییر کند، ماتریس همسایگی نیز تغییر

کرده و بنابراین مسیر بسته اویلری دیگری به دست می‌آید. ماتریس همسایگی این گراف چنین است.

$$\mathcal{A}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}.$$

مرحله (۱) راس شماره ۱ را به عنوان راس آغازین انتخاب می‌کنیم. این راس با سطر اول ماتریس متناظر است. اولین درایه غیرصفر در این سطر نشان دهنده راس بعدی در مسیر بسته اویلری است. چون $a_{۱۲}=۱$؛ پس راس بعدی روی این مسیر اویلری راس شماره ۲ است. یک واحد از درایه های $a_{۱۲}$ و $a_{۲۱}$ کم کرده و ماتریس همسایگی بهنگام شده به صورت

$$\mathcal{A}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix},$$

است. اگر ماتریس $\mathcal{A}$ درایه غیرصفر نداشته باشد، آنگاه الگوریتم پایان یافته است. در غیر این صورت مرحله بعدی اجرا می‌شود.

مرحله (۲) آخرین راس در این مسیر راس شماره ۲ است، پس به سطر دوم می‌رویم. اولین درایه غیرصفر در سطر دوم $a_{۲۳}$ است. راس بعدی در این مسیر، راس شماره ۳ است. یک واحد از درایه‌های $a_{۲۳}$ و $a_{۳۲}$ کم کرده و ماتریس همسایگی را بهنگام می‌کنیم. این ماتریس به صورت

$$\mathcal{A}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix},$$

است. چون این ماتریس هنوز درایه غیرصفر دارد، مرحله بعدی را اجرا می‌کنیم.

مرحله (۳) آخرین راس در این مسیر راس شماره ۳ است، پس به سطر سوم می‌رویم و اولین درایه غیرصفر در این سطر $a_{۳۱}$ است. پس راس شماره ۱ را مجدداً انتخاب می‌کنیم و یک واحد از درایه‌های $a_{۳۱}$ و $a_{۱۳}$ کم کرده و ماتریس همسایگی را بهنگام می‌کنیم. این ماتریس به صورت

$$\mathcal{A}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix},$$

است. توجه داشته باشید که دور کامل ۱, ۲, ۳, ۱ به وجود آمده است و هنوز به بن‌بست نرسیده‌ایم؛ چون هنوز در سطر اول درایه غیرصفر وجود دارد، مرحله بعدی را اجرا می‌کنیم.

مرحله (۴) در سطر اول درایه غیرصفر $a_{۱۵} = ۱$ است. یعنی راس بعدی در این مسیر، راس شماره ۵ است. از درایه‌های $a_{۵۱}$ و $a_{۱۵}$ یک واحد کم کرده و ماتریس همسایگی را بهنگام می‌کنیم. این ماتریس به صورت

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix},$$

است.

مرحله (۵) در سطر پنجم اولین درایه غیرصفر $a_{۵۲}$ است. پس در ادامه مسیر راس شماره ۲ انتخاب می‌شود و یک واحد از درایه‌های $a_{۵۲}$ و $a_{۲۵}$ کم کرده و ماتریس همسایگی را بهنگام می‌کنیم. این ماتریس به صورت

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix},$$

است.

مرحله (۶) در سطر دوم اولین درایه غیرصفر $a_{۲۴}$ است. بنابراین در ادامه مسیر، راس شماره ۴ انتخاب شده و یک واحد از درایه‌های $a_{۲۴}$ و $a_{۴۲}$ کم کرده و ماتریس همسایگی بهنگام شده به صورت

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix},$$

است.

مرحله (۷) در سطر چهارم اولین درایه غیرصفر $a_{۴۳} = ۱$ است. پس در ادامه مسیر، راس شماره ۳ انتخاب می‌شود و یک واحد از درایه‌های $a_{۴۳}$ و $a_{۳۴}$ کم کرده و ماتریس همسایگی بهنگام شده

به صورت

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

است.

مرحله (۸) در سطر سوم، درایه غیرصفر a_{35} است و در ادامه مسیر اویلری، راس شماره **۵** اختیار می‌شود. یک واحد از درایه‌های a_{35} و a_{53} کم کرده و ماتریس همسایگی بهنگام شده به صورت

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

است.

مرحله (۹) در سطر پنجم، درایه a_{56} غیرصفر است. در ادامه مسیر اویلری، راس شماره ۶ را اختیار می‌کنیم و یک واحد از درایه‌های a_{56} و a_{65} کم می‌کنیم. بعد از بهنگام کردن ماتریس همسایگی تنها درایه‌های غیرصفر a_{61} و a_{16} هستند و در نهایت، در مرحله آخر به راس شماره ۱ برمی‌گردیم. مسیر بسته اویلری به صورت

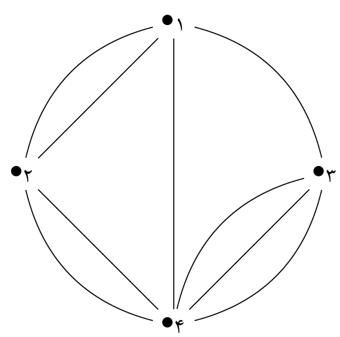
$$1, 2, 3, 1, 5, 2, 4, 3, 5, 6, 1,$$

است.

توجه داشته باشید که مسیر بسته به دست آمده متفاوت از مسیر ارائه شده در مثال ۱۱.۴ است. یعنی برای یک گراف اویلری، مسیر بسته اویلری منحصر به فرد نیست.

در مثال ۱۳.۴، بن‌بستی اتفاق نیفتاد. افزون بر این، گراف داده شده در آن مثال یک گراف ساده بود. در مثال بعدی گراف داده شده یال‌های موازی نیز دارد.

مثال ۱۴.۴ مسیر بسته اویلری برای گراف



را پیدا کنید.

حل : توجه کنید که در حالتی که گراف ساده نیست و یال‌های موازی وجود دارد، هر مولفه a_{ij} ماتریس همسایگی تعداد یال‌های که راس i را به راس j وصل می‌کند نشان می‌دهد. این ماتریس برای گراف داده شده عبارت است از:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}.$$

بعد از انجام پنج مرحله، مسیر ۱ ,۲ ,۱ ,۳ ,۴ ,۱ به دست می‌آید و ماتریس همسایگی بهنگام شده به صورت

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۲ & ۲ & ۰ \end{bmatrix},$$

است در حالی که هنوز ماتریس $\mathcal{A}$ درایه غیرصفر دارد و آخرین راس انتخاب شده راس شماره ۱ است که در سطر اول درایه غیرصفر وجود ندارد. نتیجه یک بن‌بست است. الگوریتم خروج از بن‌بست را به صورت زیر اجرا می‌کنیم.
بعد از سطر اول که همه درایه‌های آن صفر است، اولین درایه در سطر دوم $a_{۲۴} = ۲$ است. حال به ابتدای مساله برمی‌گردیم و مسیر بسته را بجای شروع از راس ۱، از راس ۲ شروع می‌کنیم. مسیر بسته ایجاد شده ۲ ,۱ ,۳ ,۴ ,۱ ,۲ است. سپس یال طی نشده از راس ۲ به راس ۴ را طی می‌کنیم. دوباره پس از انجام دو مرحله دیگر به مسیر بسته ۳ ,۴ ,۲ ,۱ ,۴ ,۳ ,۱ ,۲ می‌رسیم. ماتریس همسایگی بهنگام شده به صورت

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ \end{bmatrix},$$

است. در سطر دوم درایه غیرصفر وجود ندارد و دوباره به بن‌بست رسیدیم. اولین درایه غیرصفر در سطر سوم $a_{۳۴} = ۲$ است و این بار مسیر طی شده قبلی را به جای راس ۲ از راس ۳ شروع می‌کنیم. مسیر جدید عبارت است از ۳ ,۱ ,۲ ,۴ ,۲ ,۱ ,۴ ,۳. بعد از انجام دو مرحله دیگر ماتریس همسایگی بهنگام شده $\mathcal{A}$ به ماتریس صفر تبدیل می‌شود و مسیر بسته اویلری ۳ ,۴ ,۳ ,۱ ,۲ ,۴ ,۲ ,۱ ,۴ ,۳ به دست می‌آید. $\diamondsuit$

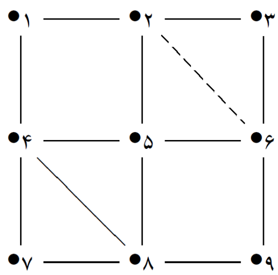
در ادامه شرط لازم و کافی برای نیمه اویلری بودن یک گراف را بیان می‌کنیم.

قضیه ۴.۴ *اگر گراف G راس منفرد نداشته باشد آنگاه نیمه اویلری است اگر و فقط اگر همبند بوده و تنها دو راس از درجه فرد داشته باشد.*
برهان: **(لزوم شرط)** *مانند برهان قضیه ۳.۴ است. تنها تفاوت در این است که راس‌های آغازی و پایانی بر هم منطبق نیستند. حشره در حرکت روی مسیر اویلری، وقتی راس آغازی را ترک می‌کند، تعداد دفعات برگشت به راس آغازی یک واحد کمتر از تعداد دفعات حرکت از این نقطه است و وقتی به راس*

*پایانی می‌رسد، **تعداد دفعات** وارد شدن به راس پایانی یک بار بیشتر از **تعداد دفعات** خروج از این راس است. پس هر دو راس آغازی و پایانی از درجه فرد هستند.*

(کفایت شرط) *یال کمکی که دو راس از درجه فرد را به هم وصل می‌کند در نظر بگیرید. در این صورت یک گراف اویلری حاصل می‌شود. مسیر بسته اویلری را با اجرای الگوریتم ارائه شده در برهان قضیه ۳.۴ ایجاد می‌کنیم. در پایان، یال کمکی را از مسیر بسته اویلری حذف می‌کنیم تا مسیر نیمه اویلری به دست آید.*

مثال ۱۵.۴ مسیر نیمه اویلری را در گراف



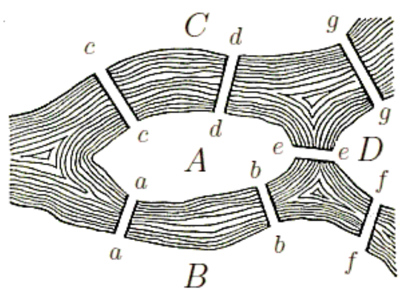
بیابید.

حل : دو راس ۶ و ۲ از درجه فرد هستند. یال کمکی {۶, ۲} را ایجاد می‌کنیم (یال کمکی به صورت خط‌چین رسم شده است). مسیر نیمه اویلری به صورت

$$۲, ۵, ۴, ۱, ۲, ۳, ۶, ۵, ۸, ۴, ۷, ۸, ۹, ۶$$

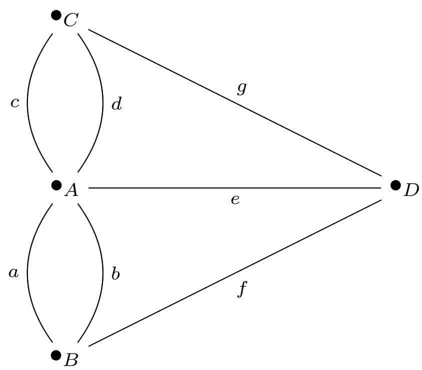
است. ◊

مثال ۱۶.۴ **(پل Königsberg)** رودخانه‌ای با دو جزیره و هفت پل به شکل



وجود دارد. در نتیجه چهار ناحیه A, B, C, D به وجود می‌آیند. سوال این است که آیا می‌توان حرکت را از ناحیه‌ای آغاز کرد و بعد از طی هر پل، دقیقاً یک بار، به نقطه آغاز حرکت برگشت؟

حل : برای پاسخ به این سوال با استفاده از مفهوم نظریه گراف، هر ناحیه را با یک راس و هر پل را با یک یال نشان می‌دهیم. در این صورت گراف متناظر با مساله پل به صورت زیر است:



این گراف اویلری نیست. زیرا درجه تمامی راس‌ها فرد است. ◇

آزمون دیگری برای اویلری بودن یک گراف وجود دارد. شرط لازم آن در سال **۱۹۷۳** توسط تویدا[۴] و شرط کافی آن در سال ۱۹۸۴ از سوی مک‌کی [۵] ثابت شد.

قضیه ۵.۴ [۸] *گراف همبند G اویلری است اگر و فقط اگر هر یال آن روی تعداد فرد از دورهای گراف G باشد.*

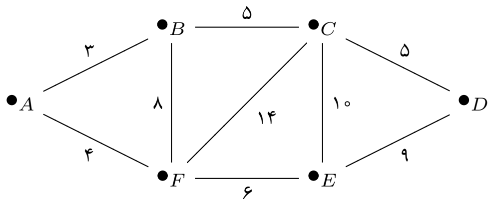
مثال ۱۷.۴ (مساله پستچی چینی) [۲۲] این مساله برای نخستین بار از سوی ریاضیدان چینی به نام می‌کوـ کوان[۶] در سال ۱۹۶۲ طرح شد. یک پستچی می‌خواهد تمامی نامه‌ها را به مقصدشان برساند در حالی که مسافت طی شده کمینه شود و در پایان کار به نقطه آغاز حرکت برگردد. در این کار هر خیابان را باید حداقل یک‌بار طی کند و اگر مجبور شود که از خیابانی دوبار عبور کند باید مسیری با کوتاه‌ترین مسافت را انتخاب کند.

این مساله را می‌توان با یک گراف وزن‌دار مدل‌بندی کرد. گراف G را **وزن‌دار** گویند هرگاه برای هر یال آن عددی صحیح و مثبت متناظر شود. این عدد را **وزن** یال گویند. در این گراف یک راس متناظر با مقصد یک نامه و هر یال‌ها با راه‌های ارتباطی بین این مقصدها متناظر است. وزن هر یال برابر با فاصله بین مقصدها است. بنابراین باید مسیری پیدا کرد که از هر یال دست کم یک بار عبور کند و در مجموع کمترین وزن را داشته باشد.

واضح است که اگر گراف اویلری باشد، آنگاه هر مسیر اویلری جواب مساله است. ولی اگر گراف اویلری نباشد حل مساله مشکل‌تر است و از حوصله این بحث خارج است. علاقمندان می‌توانند برای اطلاعات بیشتر به [۱۲] رجوع کنند. در اینجا حالت خاصی را در نظر می‌گیریم که گراف داده شده نیمه اویلری است و دو راس از درجه فرد را با B و E نشان دهید. ابتدا کوتاه‌ترین مسیر از B به E را

[۴] Shunichi Toida
[۵] Terry A. McKee
[۶] Mei Ko Kwan

مشخص می‌کنیم. سپس با افزودن این مسیر به مسیر نیمه اویلری جواب مساله به دست می‌آید. برای توصیف بیشتر گراف نیمه اویلری



را در نظر بگیرید. کوتاه‌ترین مسیر از B به E (راس‌های از درجه فرد) B, A, F, E بوده و طول این مسیر $۱۳ = ۶ + ۴ + ۳$ است. همچنین مسیر نیمه اویلری

$$B, C, D, E, F, A, B, F, C, E$$

با طول ۶۴ است. پس جواب مساله پستچی چینی در این گراف

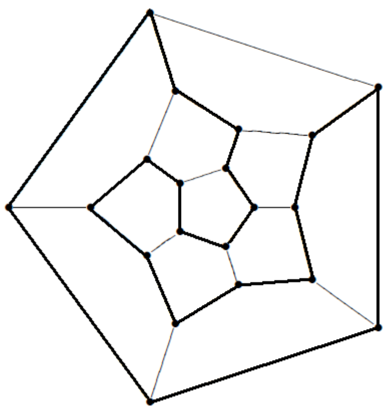
$$B, C, D, E, F, A, B, F, C, E, F, A, B$$

با طول $۷۷ = ۶۴ + ۱۳$ است.

گراف هامیلتونی

یک مسیر هامیلتونی[۷] در یک گراف مسیری بسته است که از هر راس دقیقاً یک بار عبور می‌کند. اگر در گرافی چنین مسیری وجود داشته باشد، آن گراف را **هامیلتونی** می‌نامند. اگر در این مسیر راس‌های آغازی و پایانی بر هم منطبق نباشند مسیر را **نیمه هامیلتونی** و گراف متناظر را گراف نیمه هامیلتونی گویند.

مثال ۱۸.۴ دوازده وجهی منتظم (شکل بعدی) یک گراف هامیلتونی است. مسیر هامیلتونی در این گراف با خط پررنگ رسم شده‌اند.



[۷] Sir William Rowan Hamilton (1805-1865)

چنانچه گفته شد برای اویلری بودن یک گراف شرط لازم و کافی وجود دارد و انتظار می‌رود برای هامیلتونی بودن یک گراف نیز شرط لازم و کافی وجود داشته باشد. در حالی که این مساله هنوز از مساله‌های حل‌نشده در نظریه گراف است. بیشتر قضیه‌های موجود در این مبحث، به صورت شرط لازم هستند. در اینجا دو قضیه را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه ۶.۴ (قضیه اُره[۸]) [۲۷] *اگر گراف G ساده با $n \geq ۳$ راس باشد و مجموع درجه‌های هر دو راس غیر مجاور کمتر از n نباشد، یعنی برای هر یال $\{u,v\}$، $\deg u + \deg v \geq n$، آنگاه G یک گراف هامیلتونی است.*

قضیه ۷.۴ (قضیه دیراک[۹]) [۹] *اگر گراف G ساده با $n \geq ۳$ راس باشد و درجه هر راس از $\frac{n}{۲}$ کمتر نباشد، آنگاه گراف G هامیلتونی است.*

مثال ۱۹.۴ (مساله فروشنده دوره‌گرد) در این مساله یک فروشنده دوره‌گرد می‌خواهد از چند شهر عبور کرده و به نقطه آغاز برگردد به طوری که کل مسافت طی شده کمینه شود. در این صورت هر شهر را با یک راس و فاصله بین آنها را با یک یال وزن‌دار نشان می‌دهیم که وزن روی هر یال، فاصله بین دو شهر را نشان می‌دهد. فرض بر این است که از هر شهر به هر شهر امکان رفت و آمد وجود دارد. در این صورت یک گراف هامیلتونی وزن‌دار داریم (چرا؟). جواب مساله فروشنده دوره‌گرد با پیدا کردن مسیر هامیلتونی با کمترین وزن به دست می‌آید.

برای مشخص کردن جواب این مساله روش‌های مختلفی ارائه شده است. در اینجا الگوریتمی را ارائه می‌کنیم که با استفاده از آن کوتاه‌ترین مسیر هامیلتونی مشخص می‌شود. علاقمندان به این مبحث را به کتاب‌های تخصصی‌تر از جمله [۲] ارجاع می‌دهیم.

الگوریتم ۱.۴ گام ۱: فرض کنید $C := v_۱, v_۲, \ldots, v_n, v_۱$ یک مسیر هامیلتونی با وزن ω است. یعنی

$$\omega = \omega(v_۱, v_۲) + \omega(v_۲, v_۳) + \cdots + \omega(v_{n-۱}, v_n) + \omega(v_n, v_۱).$$

گام ۲: قرار دهید $i := ۱$.

گام ۳: قرار دهید $j := i + ۲$.

گام ۴: مسیر هامیلتونی c_{ij} را به صورت

$$c_{ij} := v_۱, v_۲, \ldots, v_i, v_j, v_{j-۱}, \ldots, v_{i+۱}, v_{j+۱}, \ldots, v_n, v_۱,$$

با وزن

$$\omega_{ij} := \omega - \omega(v_i, v_{i+۱}) - \omega(v_j, v_{j+۱}) + \omega(v_i, v_j) + \omega(v_{i+۱}, v_{j+۱}),$$

تشکیل دهد. اگر $\omega_{ij} < \omega$، یعنی

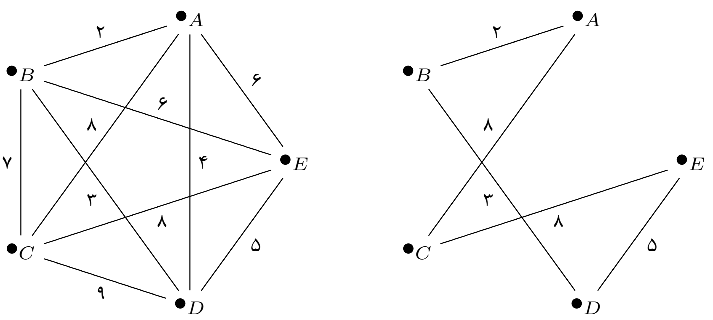
$$\omega(v_i, v_{i+۱}) + \omega(v_j, v_{j+۱}) < \omega(v_i, v_j) + \omega(v_{i+۱}, v_{j+۱}),$$

آنگاه c_{ij} را به جای C قرار داده و به گام ۱ برگردید.

---

[۸] Øystein Ore (1899-1968)

[۹] Gabriel Andrew Dirac (1925-1984)



شکل ۲۰.۴: مسیر هامیلتونی برای گراف کامل وزن‌دار $\mathcal{K}_۵$

گام ۵: قرار دهید $j := j+۱$. اگر $j \leq n$ به گام ۴ بروید. در غیر این صورت قرار دهید $i := i+۱$. اگر $i \leq n-۲$، گام ۳ را اجرا کنید. در غیر این صورت جواب مساله به دست آمده است و متوقف شوید.

مثال ۲۰.۴ گراف هامیلتونی داده شده در شکل ۴.۲۰ (شکل سمت چپ) را در نظر بگیرید. در این گراف اعداد نوشته شده روی یال‌ها فاصله بین شهرها است. الگوریتم ۱.۴ را روی این گراف اجرا می‌کنیم.

گام ۱: فرض کنید

$$\begin{aligned} C &:= v_۱, v_۲, v_۳, v_۴, v_۵, v_۱ = A, B, C, D, E, A \\ \omega &= ۲+۷+۹+۵+۶ = ۲۹. \end{aligned}$$

گام ۲: قرار دهید $i := ۱$.

گام ۳: قرار دهید $j := i+۲ = ۳$.

گام ۴: قرار دهید

$$\begin{aligned} c_{۱,۳} &:= v_۱, v_۳, v_۲, v_۴, v_۵, v_۱ = A, C, B, D, E, A \\ \omega_{۱,۳} &:= ۸+۷+۳+۵+۶ = ۲۹. \end{aligned}$$

چون $\omega_{۱,۳} \not< \omega$، گام ۵ را اجرا می‌کنیم.

گام ۵: قرار دهید $j := j+۱ = ۴$. چون $j \leq ۵$، گام ۴ را اجرا کنید.

گام ۴: قرار دهید

$$\begin{aligned} c_{۱,۴} &:= v_۱, v_۴, v_۳, v_۲, v_۵, v_۱ = A, D, C, B, E, A \\ \omega_{۱,۳} &:= ۴+۹+۷+۶+۶ = ۳۲. \end{aligned}$$

چون $\omega_{۱,۴} \not< \omega$، گام ۵ را اجرا می‌کنیم.

گام ۵: قرار دهید $j := j + ۱ = ۵$. چون $j \leq ۵$، گام ۴ را اجرا کنید.

گام ۴: قرار دهید
$$c_{۱,۵} := v_۱, v_۵, v_۴, v_۳, v_۲, v_۱ = A, E, D, C, B, A.$$
این مسیر همان مسیر C است فقط جهت طی شدن یال ها تغییر کرده است. بنابراین، $\omega_{۱,۵} = ۲۹$.

گام ۵: قرار دهید $j := j + ۱ = ۶$. چون $j > ۵$، قرار دهید $i := i + ۱ = ۲$ و گام ۳ را اجرا کنید.

گام ۳: قرار دهید $j := i + ۲ = ۴$.

گام ۴: فرض کنید

$$\begin{aligned} c_{۲,۴} &:= v_۱, v_۲, v_۴, v_۳, v_۵, v_۱ = A, B, D, C, E, A \\ \omega_{۲,۴} &:= ۲ + ۳ + ۹ + ۸ + ۶ = ۲۸. \end{aligned}$$

چون $\omega_{۲,۴} < \omega$ پس $c_{۲,۴}$ را به جای C قرار داده و به گام ۱ برگردید.

گام ۱: فرض کنید $C := v_۱, v_۲, v_۳, v_۴, v_۵, v_۱ = A, B, D, C, E, A$ و $\omega = ۲۸$.

گام ۲: قرار دهید $i := ۱$.

گام ۳: قرار دهید $j := i + ۲ = ۳$.

گام ۴: قرار دهید

$$\begin{aligned} c_{۱,۳} &:= v_۱, v_۳, , v_۲, v_۴, v_۵, v_۱ = A, D, B, C, E, A \\ \omega_{۱,۳} &:= ۴ + ۳ + ۷ + ۸ + ۶ = ۲۸. \end{aligned}$$

چون $\omega_{۱,۳} \not< \omega$ پس گام ۵ را اجرا می‌کنیم.

گام ۵: قرار دهید $j := j + ۱ = ۴$. چون $j \leq ۵$، گام ۴ را اجرا کنید.

گام ۴: قرار دهید

$$\begin{aligned} c_{۱,۴} &:= v_۱, v_۴, v_۳, v_۲, v_۵, v_۱ = A, C, D, B, E, A \\ \omega_{۱,۴} &:= ۸ + ۹ + ۳ + ۶ + ۶ = ۳۲. \end{aligned}$$

چون $\omega_{۱,۴} \not< \omega$ پس گام ۵ را اجرا می‌کنیم.

گام ۵: قرار دهید $j := j + ۱ = ۵$. چون $j \leq ۵$، گام ۴ را اجرا کنید.

گام ۴: قرار دهید

$$\begin{aligned} c_{۱,۵} &:= v_۱, v_۵, v_۴, v_۳, v_۲, v_۱ = A, E, C, D, B, A \\ \omega_{۱,۵} &:= ۶ + ۸ + ۹ + ۳ + ۲ = ۲۸. \end{aligned}$$

گام ۵: قرار دهید $j := j + ۱ = ۶$. چون $j > ۵$، قرار دهید $i := i + ۱ = ۲$ و گام ۳ را اجرا کنید.

گام ۳: قرار دهید $j := i + ۲ = ۴$.

گام ۴: قرار دهید

$$\begin{aligned} c_{۲,۴} &:= v_۱, v_۲, , v_۴, v_۳, v_۵, v_۱ = A, B, C, D, E, A \\ \omega_{۲,۴} &:= ۲۸. \end{aligned}$$

گام ۵: قرار دهید $j := j + ۱ = ۵$. چون $j \leq ۵$، گام ۴ را اجرا کنید.

گام ۴: قرار دهید

$$\begin{aligned} c_{۲,۵} &:= v_۱, v_۲, v_۵, v_۴, v_۳, v_۱ = A, B, E, C, D, A \\ \omega_{۲,۵} &:= ۲ + ۶ + ۸ + ۹ + ۴ = ۲۹. \end{aligned}$$

گام ۵: قرار دهید $j := j + ۱ = ۶$. چون $j > ۵$، قرار دهید $i := i + ۱ = ۳$ و گام ۳ را اجرا کنید.

گام ۳: قرار دهید $j := i + ۲ = ۵$.

گام ۴: قرار دهید

$$\begin{aligned} c_{۳,۵} &:= v_۱, v_۲, , v_۳, v_۵, v_۴, v_۱ = A, B, D, E, C, A \\ \omega_{۳,۵} &:= ۲ + ۳ + ۵ + ۸ + ۸ = ۲۶. \end{aligned}$$

چون $\omega_{۳,۵} < \omega$، پس $c_{۳,۵}$ را به جای C قرار داده و به گام ۱ برگردید.

گام ۱: فرض کنید $C := v_۱, v_۲, v_۳, v_۴, v_۵, v_۱ = A, B, D, E, C, A$ و $\omega = ۲۶$.

گام ۲: قرار دهید $i := ۱$.

گام ۳: قرار دهید $j := i + ۲ = ۳$.

گام ۴: قرار دهید

$$\begin{aligned} c_{۱,۳} &:= v_۱, v_۳, v_۲, v_۴, v_۵, v_۱ = A, D, B, E, C, A \\ \omega_{۱,۳} &:= ۴ + ۳ + ۶ + ۸ + ۸ = ۲۹. \end{aligned}$$

چون $\omega_{۱,۳} \not< \omega$ پس گام ۵ را اجرا می‌کنیم.

گام ۵: قرار دهید $j := j + ۱ = ۴$. چون $j \leq ۵$، گام ۴ را اجرا کنید.

گام ۴: قرار دهید

$$\begin{aligned} c_{۱,۴} &:= v_۱, v_۴, v_۳, v_۲, v_۵, v_۱ = A, E, D, B, C, A \\ \omega_{۱,۴} &:= ۶ + ۵ + ۳ + ۷ + ۸ = ۲۹. \end{aligned}$$

گام ۵: قرار دهید $j := j + ۱ = ۵$. چون $j \leq ۵$، گام ۴ را اجرا کنید.

گام ۴: قرار دهید

$$\begin{aligned} c_{۱,۵} &:= v_۱, v_۵, v_۴, v_۳, v_۲, v_۱ = A, C, E, D, B, A \\ \omega_{۱,۵} &:= ۸ + ۸ + ۵ + ۳ + ۲ = ۲۶. \end{aligned}$$

گام ۵: قرار دهید $j := j + ۱ = ۶$. چون $j > ۵$، قرار دهید $i = i + ۱ = ۲$: و گام ۳ را اجرا کنید.

گام ۳: قرار دهید $j := i + ۲ = ۴$.

گام ۴: قرار دهید

$$\begin{aligned} c_{۲,۴} &:= v_۱, v_۲, v_۴, v_۳, v_۵, v_۱ = A, B, E, D, C, A \\ \omega_{۲,۴} &:= ۲ + ۶ + ۵ + ۹ + ۸ = ۳۰. \end{aligned}$$

گام ۵: قرار دهید $j := j + ۱ = ۵$. چون $j \leq ۵$، گام ۴ را اجرا کنید.

گام ۴: قرار دهید

$$\begin{aligned} c_{۲,۵} &:= v_۱, v_۲, v_۵, v_۴, v_۳, v_۱ = A, B, C, E, D, A \\ \omega_{۲,۵} &:= ۲ + ۷ + ۸ + ۵ + ۴ = ۲۶. \end{aligned}$$

گام ۵: قرار دهید $j := j + ۱ = ۶$. چون $j > ۵$، قرار دهید $i := i + ۱ = ۳$ و گام ۳ را اجرا کنید.

گام ۳: قرار دهید $j := i + ۲ = ۵$.

گام ۴: قرار دهید

$$\begin{aligned} c_{۳,۵} &:= v_۱, v_۲, v_۳, v_۵, v_۴, v_۱ = A, B, D, C, E, A \\ \omega_{۳,۵} &:= ۲ + ۳ + ۹ + ۸ + ۶ = ۲۸. \end{aligned}$$

گام ۵: قرار دهید $j := j + ۱ = ۶$. چون $j > ۵$، قرار دهید $i := i + ۱ = ۴$. چون $i > n - ۲ = ۳$؛ پس الگوریتم خاتمه یافته و جواب مساله

$$C := A, B, D, E, C, A,$$

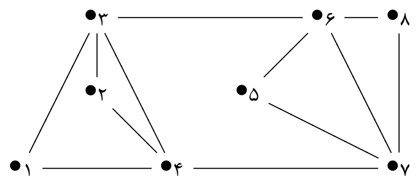
با $\omega := ۲۶$ است.

نتیجه اجرای الگوریتم در شکل ۴.۲۰ (گراف سمت راست) مشخص شده است.

تمرین ۲.۴

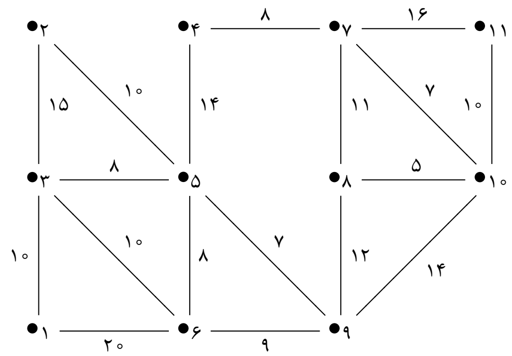
۱. برای کدام عدد صحیح و مثبت n، کدام یک از گراف های $\mathcal{C}_n$، $\mathcal{K}_n$ ، $\mathcal{K}_{n,n}$ و $\mathcal{Q}_n$ اویلری هستند.

۲. از الگوریتم قضیه ۳.۴ استفاده کرده و مسیر اویلری برای گراف



را بیابید.

۳. مسیر پستچی چینی برای گراف



را مشخص کنید.

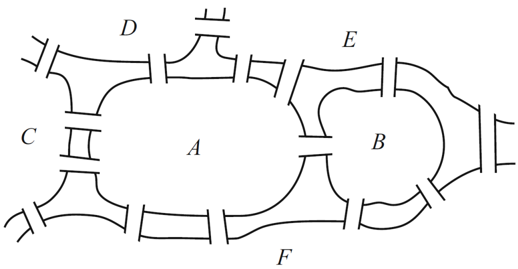
در مساله‌های ۴ تا ۶ ، ماتریس همسایگی گرافی داده شده است. مشخص کنید کدام یک از آنها اویلری و کدام نیمه اویلری است. برای آنها گراف را رسم کرده و مسیر اویلری یا نیمه اویلری را بیابید.

۴.
$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

۵.
$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

۶.
$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

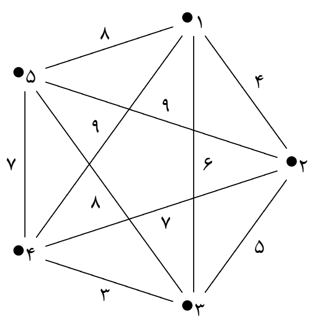
۷. مساله پل به صورت زیر را در نظر بگیرید. گراف متناظر آن را رسم کرده و نظر خود را در مورد اویلری یا نیمه اویلری بودن آن بیان کنید. در صورت مثبت بودن پاسخ، مسیر اویلری یا نیمه اویلری متناظر را با استفاده از الگوریتم ۱.۴ بیابید.



۸. نشان دهید گراف دوبخشی کامل $\mathcal{K}_{n,n}$ و گراف کامل $\mathcal{K}_n$ برای هر عدد صحیح $n \geq ۲$ هامیلتونی هستند.

۹. در گراف دوبخشی $\mathcal{K}_{n,n}$ چند مسیر هامیلتونی وجود دارد؟

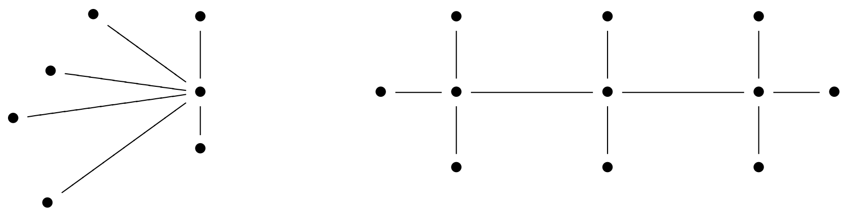
۱۰. با استفاده از الگوریتم مناسبی، مساله فروشنده دوره‌گرد به صورت زیر را حل کنید.



۱۱. ثابت کنید گرافی ساده با n راس، مسیر هامیلتونی دارد هرگاه مجموع درجه‌های هر جفت از راس‌های غیرمجاور $n-۱$ باشد.

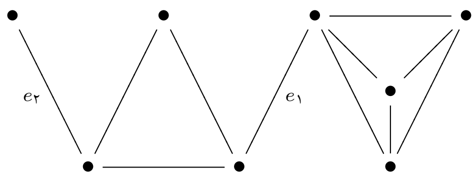
۳.۴ درخت

در این بخش حالت خاصی از گراف‌ها را که به آنها درخت می‌گوییم معرفی[1] می‌شود. هر گراف همبندی که در آن دور و حلقه‌ای نباشد، یک **گراف درختی** یا به طور خلاصه **درخت** نامیده می‌شود. هر درخت با n راس را با $\mathcal{T}_n$ نشان می‌دهند. با حذف شرط همبندی، چنین گرافی را **جنگل** می‌نامند. به عنوان نمونه، گراف‌های زیر درخت هستند:



بسیاری از خواص گراف‌ها که در حالت عمومی ثابت می‌شوند، در حالت خاص در درخت‌ها هم برقرار هستند، ولی خواصی وجود دارند که تنها در درخت‌ها برقرار هستند.

همچنان‌که گفته شد، در یک گراف، **پُل** یالی است که با حذف آن تعداد مولفه‌های گراف افزایش می‌یابد. در شکل زیر، هر دو یال $e_۱$ و $e_۲$ پل هستند.



قضیه ۸.۴ *برای جنگل $\mathcal{T}$ با n راس، گزاره‌های زیر با هم معادل هستند:*

۱. *$\mathcal{T}$ یک درخت است.*

۲. *$\mathcal{T}$ دوری ندارد و $n - ۱$ یال دارد.*

۳. *$\mathcal{T}$ همبند است و $n - ۱$ یال دارد.*

۴. *$\mathcal{T}$ همبند است و هر یال یک پل است.*

۵. *هر دو راس $\mathcal{T}$ با مسیر منحصر به فردی به هم وصل می‌شوند.*

۶. *$\mathcal{T}$ دور ندارد و با افزودن یک یال، دقیقاً یک دور به وجود می‌آید.*

برهان: حکم قضیه برای $n = ۱$ برقرار است (چرا؟). بنا بر استقراء، فرض کنید قضیه برای تعداد راس‌های کمتر از n برقرار است؛ ثابت می‌کنیم حکم برای n راس نیز برقرار است.

$۱ \to ۲$: چون $\mathcal{T}$ یک جنگل است پس دور ندارد و با حذف هر یال دلخواه از $\mathcal{T}$، تعداد مولفه‌های آن افزایش می‌یابد و هر مولفه آن یک درخت است. با فرض استقراء، تعداد یال‌های هر مولفه یک واحد

کمتر از تعداد راس‌های آن است. یعنی اگر $n_۱$ و $n_۲$ راس‌های دو مولفه از $\mathcal{T}$ باشند، تعداد یال‌های آنها به ترتیب $n_۱ - ۱$ و $n_۲ - ۱$ است. بنابراین، تعداد کل یال‌ها برابراست با

$$(n_۱ - ۱) + (n_۲ - ۱) + ۱ = (n_۱ + n_۲) - ۱ = n - ۱.$$

۲ $\leftarrow$ ۳ اگر $\mathcal{T}$ همبند نباشد، هر مولفه آن یک گراف همبند بدون دور است. بنابراین، تعداد راس‌های هر مولفه یک واحد کمتر از تعداد راس‌های آن است. در این صورت تعداد راس‌های $\mathcal{T}$ حداقل دو واحد کمتر از تعداد یال‌های آن است که با فرض ۲ متناقض است.

۳ $\leftarrow$ ۴ با حذف هر یال، یک گراف با n راس و $n - ۲$ یال باقی می‌ماند. پس دو مولفه وجود دارد. یعنی هر یال یک پل است.

۴ $\leftarrow$ ۵ چون $\mathcal{T}$ همبند است، پس هر دو راس دلخواه به وسیله حداقل یک مسیر به هم متصل می‌شوند. اگر دو راس موجود باشند که با بیش از یک مسیر (مثلاً دو مسیر) به هم وصل شوند، آنگاه این دو مسیر با هم یک دور به وجود می‌آورند و این با فرض پل بودن هر یال متناقض است.

۵ $\leftarrow$ ۶ اگر $\mathcal{T}$ دوری داشته باشد، آنگاه هر دو راس دلخواه روی این دور را می‌توان با بیش از یک مسیر به هم وصل کرد و این با فرض ۵ متناقض است. اگر یال e به $\mathcal{T}$ افزوده شود، دو راسی که روی یال e قرار دارند و قبلاً با مسیری به هم متصل بودند، با افزودن این یال، دور تولید می‌شود. منحصر به فرد بودن این مسیر از آنجا ناشی می‌شود که اگر دو دور شامل e وجود داشته باشد، آنگاه دوری وجود دارد که شامل e نیست و می‌دانیم چنین دوری وجود ندارد.

۶ $\leftarrow$ ۱ فرض کنید $\mathcal{T}$ همبند نیست. اگر یالی از یک راس در یک مولفه به راسی از یک مولفه دیگر اضافه کنیم، آنگاه دوری تولید نمی‌شود و این با فرض استقراء متناقض است. پس $\mathcal{T}$ همبند بوده و بنابراین یک درخت است.

نتیجه ۶ *جنگل F با n راس و k مولفه، $n - k$ یال دارد.*

نتیجه ۷ *چون مجموع درجه‌های راس‌های یک گراف، دو برابر تعداد یال‌های آن است، پس در یک درخت با n راس، جمع درجه راس‌ها $۲n - ۲$ است. بنابراین، در هر درخت با n راس، حداقل دو راس از درجه یک موجود است.*

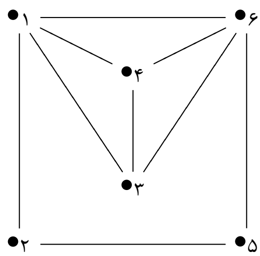
درخت فراگیر

درخت **فراگیر** برای گراف G، بزرگ‌ترین زیرگراف درختی مانند $\mathcal{T}$ در G است که با افزودن یک یال از درخت بودن خارج می‌شود. واضح است که اگر یک گراف n راس و m یال داشته باشد، درخت فراگیر متناظر آن $n - ۱$ یال داشته و $m \geq n - ۱$ است.

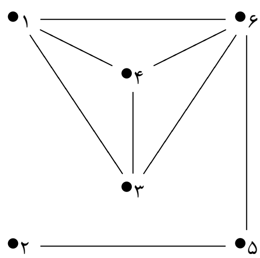
تعداد یال‌هایی از یک گراف که باید حذف کرد تا درخت فراگیر تولید شود، **عدد دور** یا **عدد دوری** نامیده و با $\gamma(G)$ نشان داده می‌شود. بنابراین، اگر تعداد مولفه‌ها k، n تعداد راس‌ها و m تعداد یال‌های گراف باشد، آنگاه $\gamma(G) = m - n + k$.

الگوریتم ۲.۴ : **(تولید درخت فراگیر)** گراف G داده شده است. دوری از گراف را انتخاب کنید و یکی از یال‌های آن را حذف کنید. گراف باقیمانده هنوز همبند است. همین کار را با سایر دورهای گراف انجام دهید تا دوری باقی نماند. در این صورت تعداد یال‌های گراف باقیمانده $n - ۱$ بوده و در نتیجه یک درخت همبند است که همان درخت فراگیر G است.

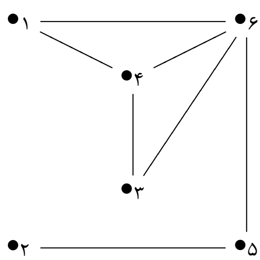
مثال ۲۱.۴ گراف زیر را درنظر بگیرید:



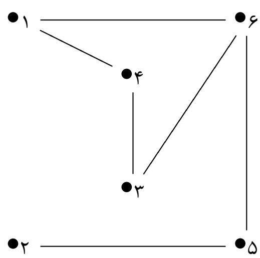
این گراف شش راس و نه یال دارد. برای ایجاد درخت فراگیر باید چهار یال را از این گراف حذف کنیم. در دور ۱, ۳, ۶, ۵, ۲, ۱ یال {۱, ۲} را حذف کنید. گراف باقیمانده به صورت



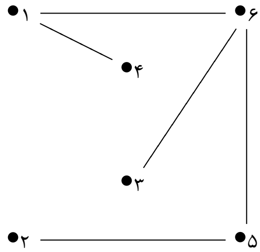
است. در دور ۱, ۴, ۳, ۱ از گراف باقیمانده، یال {۱, ۳} را حذف کنید. گراف زیر تولید می‌شود.



دور بعدی ۱, ۶, ۴, ۱ را در نظر گرفته و یال {۴, ۶} را حذف کنید. داریم:



در این گراف، تنها دور باقیمانده ۱, ۶, ۳, ۴, ۱ است و با انتخاب یال {۴, ۳} برای حذف، درخت فراگیر این گراف به صورت



تولید می‌شود.

در مورد تعداد درخت‌های فراگیر برای گراف کامل $\mathcal{K}_n$، قضیه بعدی را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه ۹.۴ [۵] *(کایلی[۱۰]) گراف کامل $\mathcal{K}_n$، $n^{n-۲}$ درخت فراگیر دارد.*

در ادامه این بخش، الگوریتم دیگری برای تولید درخت فراگیر بیان می‌کنیم. در این الگوریتم از ماتریس همسایگی استفاده شده و با رایانه قابل اجرا است.

الگوریتم ۳.۴ قرار دهید $i = ۱$:

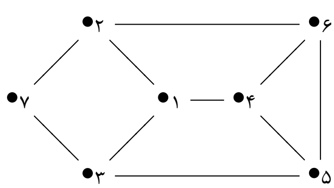
گام ۱: راس i را انتخاب کنید (انتخاب هر سطر از ماتریس همسایگی متناظر با انتخاب یک راس از گراف است).

گام ۲: کوچک‌ترین مقدار j را مشخص کنید که در آن $a_{ij} \neq ۰$ و $j = ۱, \dots, n$.

گام ۳: فرض کنید درایه a_{ik} در گام ۲ انتخاب شود. راس بعدی انتخاب شده در درخت فراگیر، راس k و یال متناظر $\{i, k\}$ است. در ماتریس همسایگی تمامی درایه‌های سطر و ستون i را صفر قرار دهید.

گام ۴: اگر تمامی درایه‌های ماتریس همسایگی به صفر تبدیل شده‌است، آنگاه درخت فراگیر تولید شده‌است. در غیر این صورت قرار دهید $i = k$ و به گام ۲ برگردید.

مثال ۲۲.۴ الگوریتم ۳.۴ را روی گراف زیر اجرا کرده و درخت فراگیر متناظر را مشخص کنید.



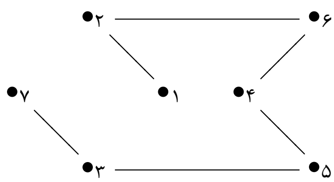
[۱۰] Arthur Cayley (1821-1895)

حل : ماتریس همسایگی این گراف به صورت

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

در مرحله اول، راس ۱ و۲ اختیار می‌شوند. ۱, ۲
در مرحله دوم، راس ۶ انتخاب می‌شود. ۱, ۲, ۶
در مرحله سوم، راس ۴ انتخاب می‌شود. ۱, ۲, ۶, ۴
در مرحله چهارم، راس ۵ انتخاب می‌شود. ۱, ۲, ۶, ۴, ۵
در مرحله پنجم، راس ۳ انتخاب می‌شود. ۱, ۲, ۶, ۴, ۵, ۳
در مرحله ششم، راس ۷ انتخاب می‌شود. ۱, ۲, ۶, ۴, ۵, ۳, ۷

دنباله راس‌های انتخاب‌شده در مرحله آخر، درخت فراگیر را مشخص می‌کند. در شکل بعدی تنها یال‌های این درخت رسم شده‌اند.



◇

درخت فراگیر مینیمال

فرض کنید گراف G وزن‌دار است. درخت فراگیری که کمترین مجموع وزن را داشته باشد، **درخت فراگیر مینیمال** یا **درخت بهینه** گراف G می‌نامند.

در ادامه دو الگوریتم برای تولید درخت فراگیر مینیمال بیان می‌کنیم.

الگوریتم ۴.۴ کروسکال[۱۱]:[۲۱] گراف همبند G را با مجموعه یال‌های E و n راس در نظر بگیرید.

گام ۱: یال $e_۱$ (طوقه نباشد) از گراف G را چنان انتخاب کنید که $w(e_۱)$ کمترین است.

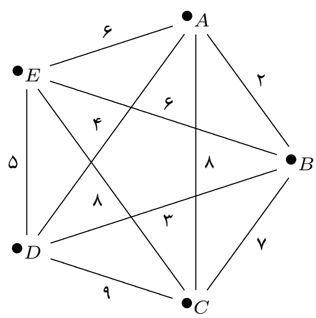
گام ۲: اگر یال‌های $e_۱, e_۲, \dots, e_i$ انتخاب شده‌اند، یال $e_{i+۱}$ را چنان مشخص کنید که:

- زیرگراف به دست آمده از یال‌های $e_۱, e_۲, \dots, e_i, e_{i+۱}$ دور تشکیل ندهد.
- در بین یال‌های انتخاب نشده، $w(e_{i+۱})$ کمترین باشد.

گام ۳: اگر $n-۱$ یال انتخاب شده‌است، متوقف شوید. در غیر این صورت به گام ۲ برگردید.

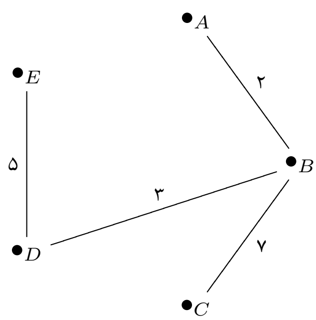
[۱۱] Joseph. B. Kruskal (1928-2010)

مثال ۲۳.۴ با استفاده از الگوریتم کروسکال، درخت فراگیر مینیمال برای گراف



را بیابید.

حل : در گام اول یال $e_۱ = \{v_۱, v_۲\}$ انتخاب می‌شود و داریم $w(e_۱) = ۲$. در گام دوم، $e_۲ = \{v_۲, v_۳\}$ اختیار می‌شود که وزن آن $w(e_۲) = ۳$ است. یال بعدی با کمترین وزن $\{v_۱, v_۴\}$ است ولی با انتخاب این یال، یک دور به وجود می‌آید. پس یال $e_۳ = \{v_۴, v_۵\}$ با وزن $w(e_۳) = ۵$ انتخاب می‌شود. با استفاده از الگوریتم ۴.۴ و ادامه انتخاب یال‌ها، درخت فراگیر مینیمال عبارت است از:



وزن این درخت $w = ۲ + ۳ + ۵ + ۷ = ۱۷$ است. ◊

الگوریتم بعدی در سال ۱۹۵۶ توسط پرایم[۱۲] [۲۸] ارائه گردید.

الگوریتم ۵.۴ گراف همبند G را با مجموعه یال‌های E و n راس در نظر بگیرید.

گام ۱: فرض کنید i راس دلخواهی از گراف G است. با شروع از i، درخت فراگیر مینیمال $\mathcal{T}$ را تولید می‌کنیم.

گام ۲: فرض کنید e یالی از G با حداقل وزن است که به یکی از راس‌های $\mathcal{T}$ متصل بوده، ولی راس دیگر آن در $\mathcal{T}$ قرار ندارد. این یال را به درخت اضافه کنید.

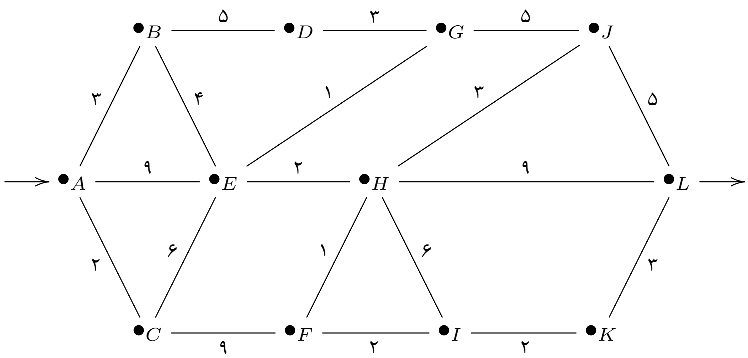
گام ۳: اگر $n - ۱$ یال انتخاب شده‌است، متوقف شوید. در غیر این صورت به گام ۲ برگردید.

[۱۲] Robert C. Prim (1921 -)

مثال ۲۴.۴ مثال ۲۳.۴ را با الگوریتم پرایم حل کنید. همان درخت مولد بار دیگر تولید می‌شود.

حال به بیان کاربردی از درخت فراگیر مینیمال می‌پردازیم. فرض کنید می‌خواهیم یک شبکه راه‌آهن بین n شهر احداث کنیم. با توجه به هزینه زیاد احداث مسیرها، می‌خواهیم درختی از یال‌ها با کمترین هزینه احداث کنیم، طوری که تمامی شهرها را به هم متصل کند. جواب این مساله با درخت فراگیر مینیمال مشخص می‌شود. در اینجا هر شهر را با یک راس متناظر می‌کنیم و وزن هر یال را هزینه احداث مسیر راه‌آهن بین دو شهر (دو گره انتهایی یال) فرض می‌کنیم. همین موضوع را می‌توان برای احداث خطوط انتقال برق و تلفن، و یا ساخت شبکه متروی شهری نیز به کار برد.
در بخش دوم این فصل؛ در مساله پستچی چینی با مفهوم کوتاه‌ترین مسیر آشنا شدید. کوتاه‌ترین مسیر بین دو راس A و B مسیری است که این دو راس را به هم متصل می‌کند در حالی که مجموع وزن یال‌های روی این مسیر نسبت به سایر مسیرها کمترین است. در ادامه این بخش، الگوریتم کارآمدی را برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر بین دو راس بیان می‌کنیم. برای درک بهتر مساله، الگوریتم را ضمن یک مثال تشریح می‌کنیم.

مثال ۲۵.۴ فرض کنید در یک شبکه حمل و نقل، نقطه آغاز و پایان حمل کالا داده شده است و برای رسیدن به مقصد، مسیرهای مختلف با مسافت‌های متفاوت (یا زمان‌های متفاوت برای طی مسیر ــ یا هزینه‌های متفاوت در مسیرهای مختلف) وجود دارد. این شبکه در شکل زیر آورده شده است و اعداد نوشته شده روی یال‌ها همان فاصله مکانی (زمانی یا هزینه) است. راس A مبدا و راس L مقصد است. کوتاه‌ترین مسیر از A به L را بیابید.



حل : به سادگی می‌توان کران بالایی برای جواب مساله به دست آورد. کافی است مسیری را به تصادف انتخاب کرده و مجموع وزن یال‌های روی این مسیر را محاسبه کرد. به عنوان مثال مسیر A, B, D, G, J, L مسیری با وزن $w = ۳ + ۵ + ۳ + ۵ + ۵ = ۲۱$ است. الگوریتم زیر برای حل مساله ارائه می‌شود.
متناظر با راس دلخواه v، عددی مانند $L(v)$ را در نظر می‌گیریم که نشان دهنده کوتاه‌ترین مسیر از راس A به راس v است. برای راس A، فرض کنید $L(A) = ۰$. از راس A می‌توان به یکی از راس‌های B، C یا E حرکت کرد که برچسب موقت آنها عبارتند از:

$$\begin{aligned} B \longrightarrow L(B) &= L(A) + ۳ = ۳ \\ C \longrightarrow L(C) &= L(A) + ۲ = ۲ \\ E \longrightarrow L(E) &= L(A) + ۹ = ۹ \end{aligned}$$

کمترین آنها $L(C) = ۲$ است و مسیر متناظر A, C است.
گام بعدی؛ مشاهده راس‌های مجاور راس C است. یعنی راس‌های E و F. برچسب‌های موقت متناظر این راس‌ها عبارتند از:

$$\begin{aligned} E \longrightarrow L(E) &= L(C) + ۶ = ۲ + ۶ = ۸ \\ F \longrightarrow L(F) &= L(C) + ۹ = ۲ + ۹ = ۱۱ \end{aligned}$$

توجه کنید که می‌توانستیم از راس B نیز به راس E وارد شویم و $L(B) = ۳$. پس

$$\begin{aligned} L(E) &= \min\{L(C) + ۶, L(A) + ۹, L(B) + ۴\} \\ &= \min\{۸, ۹, ۷\} = ۷. \end{aligned}$$

بنابراین، $L(E) = ۷$ برچسب دایمی راس E بوده و مسیر متناظر عبارت است از A, B, E.
برچسب‌های موقت راس‌های D، F و H عبارتند از:

$$L(D) = ۸, \quad L(F) = L(C) + ۹ = ۱۱, \quad L(H) = L(E) + ۲ = ۹.$$

توجه کنید که می‌توان از راس H نیز به راس F وارد شد. در این صورت

$$L(F) = \min\{L(C) + ۹, L(H) + ۱\} = \min\{۱۱, ۱۰\} = ۱۰.$$

پس برچسب دائمی D، F و H به ترتیب ۸، ۱۰ و ۹ هستند. از یکی از دو راس D یا E نیز می‌توان به راس G وارد شد. پس برچسب موقت G عبارت است از:

$$L(G) = \min\{L(D) + ۳, L(E) + ۱\} = \min\{۸ + ۳, ۷ + ۱\} = ۸.$$

همچنین، برچسب موقت راس I عبارت است از:

$$L(I) = \min\{L(F) + ۲, L(H) + ۶\} = \min\{۱۰ + ۲, ۹ + ۶\} = ۱۲.$$

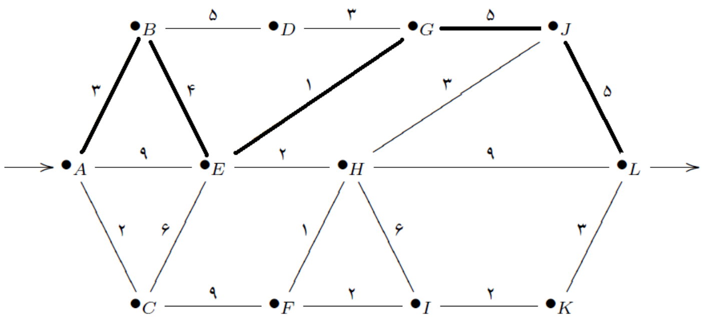
به همین ترتیب، برچسب موقت K عبارت است از:

$$L(K) = \min\{L(I) + ۲, L(H) + ۶\} = \min\{۱۲ + ۲, ۹ + ۶\} = ۱۴.$$

اگر محاسبه برچسب‌ها را طبق روال فوق ادامه دهیم، در نهایت برچسب‌های دائمی راس‌ها به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{array}{llll} L(A) = ۰ & L(B) = ۳ & L(C) = ۲ & L(D) = ۸ \\ L(E) = ۷ & L(F) = ۱۰ & L(G) = ۸ & L(H) = ۹ \\ L(I) = ۱۲ & L(J) = ۱۲ & L(K) = ۱۴ & L(L) = ۱۷. \end{array}$$

دو کوتاه‌ترین مسیر از A به L با وزن ۱۷ عبارتند از A, B, E, G, J, L و A, B, E, H, F, I, K, L.
آیا مسیر دیگری با این وزن وجود دارد؟ مسیر اول در گراف زیر با خط پر نشان داده شده‌اند.



$\diamondsuit$

با توجه به اینکه مسیر حاصل از راس A به راس L، در هر صورت یک درخت است، ممکن است چنین به نظر رسد که می‌توان برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر از درخت فراگیر مینیمال استفاده کرد. هر چند مسیر منحصر به فردی روی درخت فراگیر مینیمال بین دو راس A و B وجود دارد، ولی این بدان معنی نیست که این مسیر کوتاه‌ترین مسیر بین هر دو راس است. نمونه‌هایی وجود دارند که کوتاه‌ترین مسیر بین مبدا و مقصد کمتر از مقداری است که از روی درخت بهینه مشخص می‌شود.

تمرین ۳.۴

۱. گراف همبند با n راس و m یال چند درخت فراگیر متمایز دارد؟

۲. گرافی با بیش از یک درخت فراگیر مینیمال پیدا کنید.

۳. یک گراف با n راس در نظر بگیرید که به ترتیب با شماره‌های $n-۱, \dots, ۲, ۱, ۰$ شماره‌گذاری شده‌اند. فرض کنید وزن یال $\{u, v\}$ برابر $|u - v|$ است. برای $n = ۳$ و $n = ۴$ گراف متناظری رسم کنید و درخت فراگیر مینیمال را بیابید. درخت فراگیر مینیمال را برای حالت کلی n راس بیابید.

۴. مساله قبلی را برای حالتی که $w(\{u, v\}) = u + v$ است، حل کنید.

۵. الگوریتمی برای درخت فراگیر ماکزیمال، یعنی درختی که حداکثر مجموع وزن‌ها را داشته باشد، ارائه دهید. چه تعبیر اقتصادی می‌توان برای آن ارائه کرد.

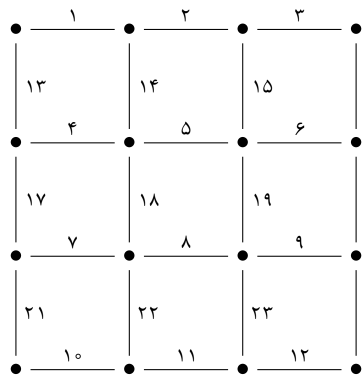
۶. فرض کنید G یک گراف وزن‌دار همبند است که در آن وزن یال‌ها متمایز هستند. نشان دهید درخت فراگیر مینیمال گراف G منحصر به فرد است.

۷. نشان دهید برای هر عدد صحیح $n \geq ۲$، گراف همبند وزن‌داری وجود دارد که دقیقاً n درخت فراگیر مینیمال متمایز دارد.

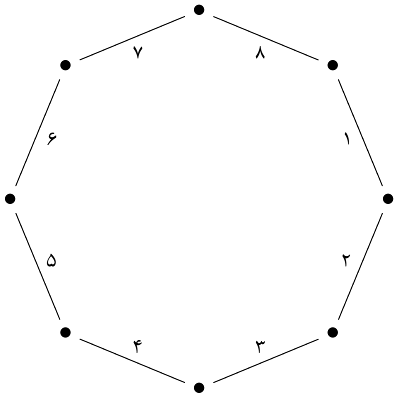
۸. در گراف‌های زیر، از الگوریتم‌های کروسکال یا پرایم استفاده کرده و درخت فراگیر مینیمال را

به دست آورید.

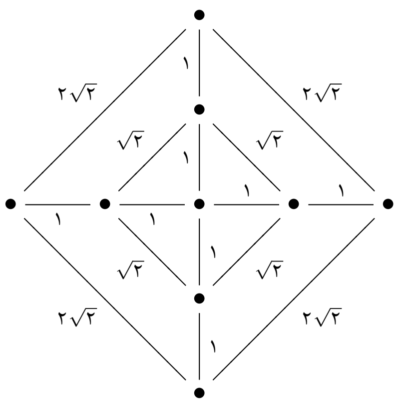
(الف)



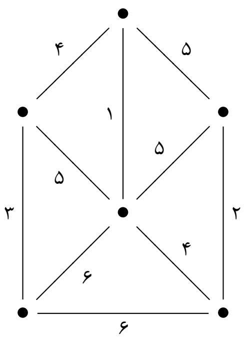
(ب)



(ج)



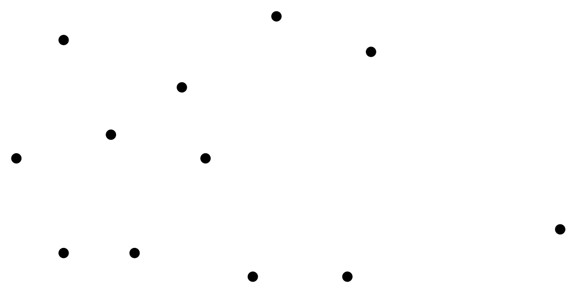
(د)



۹. الگوریتم دیگری برای مشخص کردن درخت فراگیر مینیمال چنین است که تمامی یال‌ها با بیشترین وزن را در گراف حذف کنیم تا $n - ۱$ یال باقی بماند. در حذف یال از گراف، باید مراقب باشیم تا همبندی گراف باقیمانده حفظ شود. این الگوریتم را روی گراف‌های تمرین قبلی انجام دهید و درخت‌های فراگیر مینیمال به دست آمده را با درخت‌های به دست آمده قبلی مقایسه کنید.

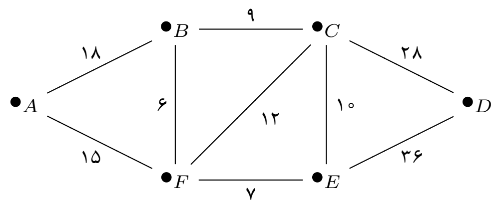
۱۰. در شکل بعدی، ۱۲ نقطه داده شده است. این نقاط را با استفاده از ساختار درختی با ۱۱ یال به هم وصل کنید طوری که کل طول خطوط رسم شده کمینه شود (به خط کش نیاز خواهید

داشت).



۱۱. با توجه به قضیه ۹.۴، ۱۲۵ درخت فراگیر برای گرافی با مجموعه رئوس $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ وجود دارد. این درخت‌ها را به کلاس‌های هم‌ارزی افراز کنید طوری که دو درخت در یک کلاس هستند اگر و فقط اگر یکریخت باشند. تعداد کلاس‌های هم‌ارزی و تعداد اعضای هر کلاس را با در نظر گرفتن تعداد روش‌های مختلف نام‌گذاری راس‌ها معین کنید.

۱۲. کوتاه‌ترین مسیر از A به D را در گراف زیر مشخص کنید.



۴.۴ درخت‌های دودویی و الگوریتم‌های جستجو

در این بخش، درخت‌های جهت‌دار و در حالت خاص درخت‌های دودویی را مطالعه کرده و کاربردهایی از درخت‌های دودویی در الگوریتم‌های جستجو را بیان می‌کنیم.

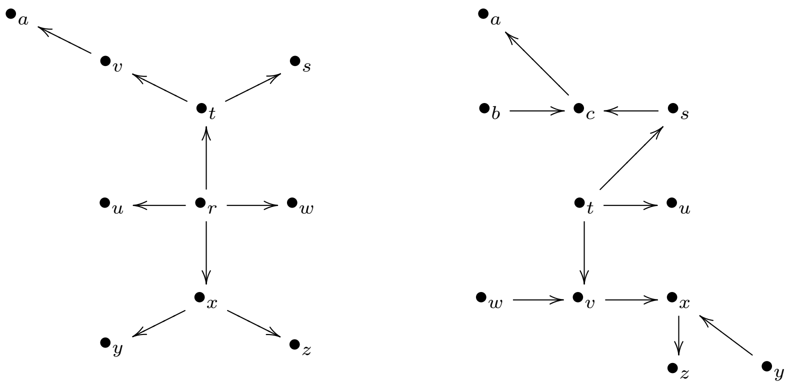
درخت جهت‌دار یک گراف جهت‌دار است که شرط درخت بودن را نیز داشته باشد. درخت جهت‌دار $\mathcal{T}$ را **ریشه‌دار** گویند هرگاه راسی مانند r موجود باشد به طوری که برای هر راس دیگر v در $\mathcal{T}$ مسیری از r به v موجود باشد.

شکل ۴.۲۱ دو درخت جهت‌دار را نشان می‌دهد . درخت جهت‌دار سمت چپ، یک درخت ریشه‌دار با ریشه r است در حالی که درخت جهت‌دار سمت راست ریشه ندارد.

در رسم یک درخت ریشه‌دار $\mathcal{T}$، رعایت قاعده زیر متداول است:

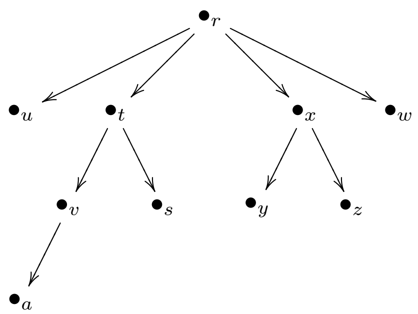
قاعده رسم درخت ریشه‌دار:

ریشه را در بالاترین (یا پایین‌ترین) نقطه قرار داده و آن را تراز صفر می‌نامند. راس‌های مجاور با ریشه r را در یک تراز پایین‌تر (بالاتر) قرار می‌دهند و آن را تراز اول گویند. تمامی راس‌هایی که با یکی از راس‌های تراز اول مجاور باشند، در تراز دوم قرار می‌گیرند. در حالت کلی، هر راس از تراز k ـ‌ام ، دقیقا با یک راس از تراز $(k - ۱)$ ـ‌ام مجاور است.



شکل ۲۱.۴: دو درخت جهت‌دار

درخت ریشه‌دار ارائه شده در شکل ۴.۲۱ بار دیگر با رعایت قواعد فوق‌الذکر ترسیم شده است.



قضیه بعدی آزمونی را برای ریشه‌دار بودن درخت جهت‌دار ارائه می‌کند. ابتدا تعریف زیر را در نظر بگیرید.

در یک گراف جهت‌دار، درجه هر راس با مجموع یال‌های ورودی و یال‌های خروجی آن راس برابر است. تعداد یال‌های ورودی به راس v را **درجه ورودی** آن راس نامیده و با $id(v)$ یا $\deg^-(v)$ نشان می‌دهند و تعداد یال‌های خروجی از راس v را **درجه خروجی** آن نامیده و با $od(v)$ یا $\deg^+(v)$ نشان می‌دهند. واضح است که

$$\deg(v) = id(v) + od(v) = \deg^-(v) + \deg^+(v).$$

قضیه ۱۰.۴ *درخت جهت‌دار $\mathcal{T}$ ریشه‌دار است اگر و فقط اگر راسی مانند r در $\mathcal{T}$ موجود باشد، طوری که $id(r) = ۰$ و برای تمامی راس‌های دیگر $\mathcal{T}$ مانند v، داشته باشیم $id(v) = ۱$.*

برهان: فرض کنید $\mathcal{T}$ یک درخت ریشه‌دار با ریشه r است. آنگاه $id(r) = ۰$. فرض کنید v (متمایز از r) راسی دلخواه از $\mathcal{T}$ بوده و نیز، فرض کنید v در تراز iـام ($i > ۰$) قرار دارد. در این صورت دقیقاً از یک راس از تراز $i - ۱$ـام منشعب شده است. پس $id(v) = ۱$.

برعکس، فرض کنید $\mathcal{T}$ یک درخت جهت‌دار شامل راس r با $id(r) = 0$ است و به ازای هر راس دیگر v، داریم $id(v) = 1$. اگر u_1 راسی از $\mathcal{T}$ متمایز از r باشد، چون $id(u_1) = 1$، پس راسی مانند u_2 موجود است که مجاور با u_1 بوده و u_1 از آن راس منشعب می‌شود. اگر $u_2 \neq r$، آنگاه راسی مانند u_3 موجود است که u_2 از آن منشعب شده است. راس‌های u_1, u_2, u_3 آغاز یک دنباله هستند.
این دنباله را تا آنجا که امکان‌پذیر است ادامه می‌دهیم. تمامی راس‌های این دنباله متمایز هستند، زیرا اگر برای $i < j$، $u_i = u_j$ باشد و راس‌های $u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}$ متمایز باشند آنگاه دنباله راس‌های

$$u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_j = u_i$$

یک دور است و این غیرممکن است. پس دنباله مذکور متناهی است. مثلا

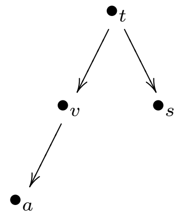
$$u_1, u_2, \ldots, u_n$$

چون تنها در راس r، درجه ورودی $id(r) = 0$ است، پس $u_n = r$ و بنابراین مسیری از r به u_1 موجود است. به این ترتیب برهان قضیه کامل می‌شود.

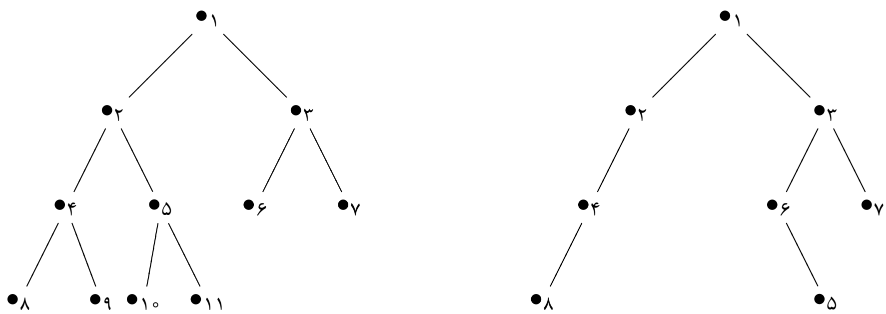
این قضیه نشان می‌دهد که ریشه یک درخت جهت‌دار، در صورت وجود منحصر به فرد است. چون می‌توان هر درخت ریشه‌دار را چنان رسم کرد که ریشه در بالا قرار گرفته و بقیه ترازها در پایین قرار بگیرند، پس در رسم درخت‌های ریشه دار از رسم جهت روی یال‌ها خودداری کرده و فرض می‌کنیم جهت تمامی یال‌ها رو به پایین هستند.

الگوریتم‌های مرتب‌سازی و جستجوی موثر

جستجو و مرتب‌سازی دو موضوع مهم در علوم رایانه است. گردایه‌ای از اشیا داده شده است و هدف ما جستجو برای یافتن شی خاص در بین این داده‌ها و یا مشخص کردن این که این شی در بین این اشیا وجود ندارد. معمولا این اشیا مقادیر کلیدی دارند و هنگام جستجو می‌خواهیم داده‌های متناظر با این مقادیر کلیدی را بازیابی کنیم. به عنوان مثال یک کتاب تلفن، گردایه‌ای از نام‌ها (که می‌خواهیم آن را بیابیم) و شماره تلفن (آن چیزی که می‌خواهیم از این فرد بدانیم) است. در این بخش از کتاب فقط روشی را توضیح می‌دهیم که مقادیر کلیدی را بیابیم و باید در نظر داشته باشیم که هدف اشخاص از جستجو، به دست آوردن اطلاعات جانبی متناظر با این مقادیر کلیدی است.
قبل از بررسی روش‌های جستجو، لازم است با چند اصطلاح آشنا شویم. فرض کنید $\mathcal{T}$ یک درخت ریشه‌دار است. اگر راسی مانند v از درخت $\mathcal{T}$، مجاور با راس u باشد و راس u در ترازی پایین‌تر از v قرار داشته باشد، آنگاه u را **فرزند** v و v را **والد** u می‌نامند. به عنوان مثال، در گراف صفحه ۱۶۳ ، z فرزند x و x والد y است.
فرض کنید $\mathcal{T}$ یک درخت ریشه‌دار است. راس w را **وارث** راس v گویند (v را **جد** w نامند، اگر مسیری از v به w در $\mathcal{T}$ در پایین v قرار داشته باشد. به عنوان مثال، در درخت ریشه‌دار صفحه ۱۶۳، a وارث t است زیرا، مسیری از t به a وجود دارد و این مسیر عبارت است از t, v, a که تمامی راس‌های این مسیر در زیر راس t واقع هستند. در حالی که y وارث t نیست. زیرا مسیر t, r, x, y از راس t به راس y راس‌هایی را شامل می‌شود که در پایین t قرار ندارند.
راسی مانند v را در یک درخت ریشه‌دار در نظر بگیرید. زیردرختی که با راس v و تمامی ورثه‌های آن مشخص می‌شود، خود یک درخت ریشه‌دار است. این زیردرخت را **زیردرخت ماکزیمال** $\mathcal{T}$ با ریشه v می‌نامند. در شکل ۴.۲۲، زیردرخت ماکزیمال درخت ریشه‌دار داده شده در صفحه ۱۶۳، با ریشه t رسم شده است. پس در یک درخت ریشه‌دار، ریشه والد ندارد و بقیه راس‌ها هر کدام تنها یک والد



شکل ۲۲.۴: زیردرخت ماکزیمال



شکل ۲۳.۴: نمونه‌هایی از درخت‌های ریشه‌دار دودویی

دارد. راسی که هیچ فرزندی نداشته باشد، **راس آویزان یا معلق (برگ)** نامیده شده و بقیه راس‌ها را **راس میانی** می‌نامند.

درخت ریشه‌داری که هر راس آن حداکثر دو فرزند داشته باشد، درخت **دودویی** نامیده می‌شود و هر فرزند را **فرزند راست** یا **فرزند چپ** می‌گویند. هنگام رسم یک درخت دودویی، فرزند راست را در سمت راست و پایین ریشه و فرزند چپ را در سمت چپ و پایین ریشه رسم می‌کنند. دو شکل ۴.۲۳ نمونه‌هایی از درخت‌های ریشه‌دار دودویی هستند.

در ادامه بحث، مساله‌ای را بیان کرده و الگوریتم‌هایی برای حل آن ارائه می‌دهیم. فرض کنید یک فهرست الفبایی از کلمات داده شده است و می‌خواهیم مشخص کنیم که آیا کلمه خاصی در این فهرست قرار دارد یا نه. مثلاً فرض کنید فهرست مسافران یک پرواز داده شده است و هدف، جستجوی نام خاصی در بین این اسامی است. سوال این است:

«جستجو را به چه روشی انجام دهیم؟»

ساده‌ترین روش این است که جستجو را ابتدای فهرست آغاز کرده و به ترتیب، تا یافتن نام مسافر مورد نظر ادامه دهیم. ممکن است نام مسافر را بیابیم و یا به پایان فهرست برسیم. این الگوریتم را اغلب **الگوریتم جستجوی ترتیبی** می‌نامند. فرض کنید $w(i)$ نشان دهنده کلمه موجود در مکان iـ ام فهرست

است. اگر در این فهرست n کلمه وجود داشته باشد، آنگاه این کلمات به ترتیب الفبایی عبارتند از:

$$w(۱), w(۲), \ldots, w(n).$$

اگر هدف جستجوی کلمه KEY است، سوال این است:

«آیا برای $۱ \leq k \leq n$ ، $w(k) = \mathrm{KEY}$ درست است؟»

الگوریتم ۶.۴ الگوریتم جستجوی ترتیبی

گام اول قرار دهید $k = ۱$.

گام دوم اگر $w(k) = \mathrm{KEY}$ آنگاه، جواب مثبت است و عملیات متوقف شود.

گام سوم اگر $k = n$ ، عملیات متوقف شود. چنین کلمه‌ای در فهرست وجود ندارد.

گام چهارم k را یک واحد افزایش دهید و به گام دوم برگردید.

حداکثر تعداد مراحل جستجو در این الگوریتم n است. این الگوریتم ساده است ولی در عمل قابل استفاده نیست. با افزایش مقدار n، زمان جستجو به طور خطی افزایش می‌یابد. روش‌های مفیدتر برای جستجو، الگوریتم‌های جستجوی دودویی است.

در روش **جستجوی دودویی**، ابتدا فهرست مورد نظر را با راس‌های یک درخت دودویی متناظر قرار داده و جستجو را روی درخت انجام می‌دهیم. در این بخش سه روش جستجو را معرفی می‌کنیم.

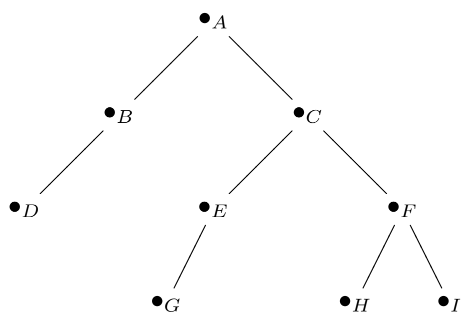
الگوریتم ۷.۴ (جستجوی پیش‌ترتیب)

گام اول ریشه را مشخص کنید.

گام دوم زیردرخت چپ را با الگوریتم جستجوی پیش‌ترتیب، مشخص کنید.

گام سوم زیردرخت راست را با الگوریتم جستجوی پیش‌ترتیب، مشخص کنید.

مثال ۲۶.۴ گراف زیر را در نظر بگیرید:



با استفاده از الگوریتم پیش‌ترتیب، فهرست مذکور به صورت زیر مرتب می‌شود.

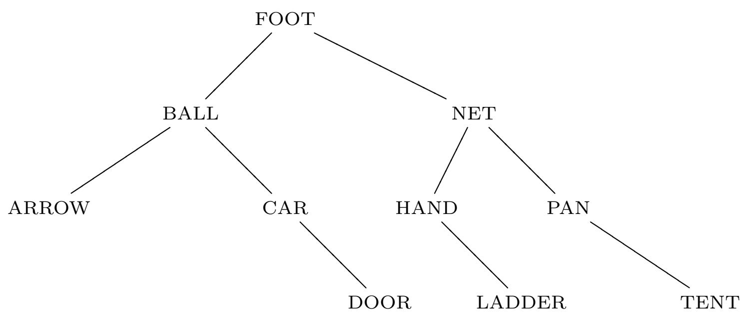
$$A, [B, D], [\,[C, [E, G], [F, H, I]\,].$$

مثال ۲۷.۴ فهرست الفبایی زیر داده شده است:

$$\begin{array}{ll} w(۱) = \mathrm{ARROW} & w(۲) = \mathrm{BALL} \\ w(۳) = \mathrm{CAR} & w(۴) = \mathrm{DOOR} \\ w(۵) = \mathrm{FOOT} & w(۶) = \mathrm{HAND} \\ w(۷) = \mathrm{LADDER} & w(۸) = \mathrm{NET} \\ w(۹) = \mathrm{PAN} & w(۱۰) = \mathrm{TENT} \end{array}$$

آیا کلمه DOOR در این فهرست وجود دارد؟

حل : برای پاسخ دادن به این سوال، ابتدا آنها را با راس‌های یک درخت دودویی متناظر می‌کنیم. چون تعداد کل راس‌ها n است، ریشه را با شماره k، $w(k)$ مشخص می‌کنیم که در آن $k = [\frac{n+۱}{۲}]$. پس کلمه $\mathrm{FOOT} = w(۵)$ ریشه درخت است. فرزند راست کلمه FOOT (کلمه Hand)، کلمه‌ای است که می‌خواهیم در این فهرست، بعد از کلمه FOOT قرار گیرد. فرزند چپ کلمه FOOT ، کلمه‌ای است که می‌خواهیم در فهرست قبل از FOOT قرار گیرد. با ادامه این روش، درخت دودویی زیر به دست می‌آید.



توجه کنید که در هر زیردرخت، ریشه با استفاده از $\bar{k} = [\frac{m+۱}{۲}]$ مشخص می‌شود که در آن m تعداد راس‌های آن زیردرخت است.
اینک با استفاده از الگوریتم پیش‌ترتیب برای یافتن پاسخ سوال، به صورت زیر عمل می‌کنیم.

مرحله اول آیا $w(۵) = \mathrm{DOOR}$؟ چون جواب منفی است پس گام دوم را اجرا کنید.

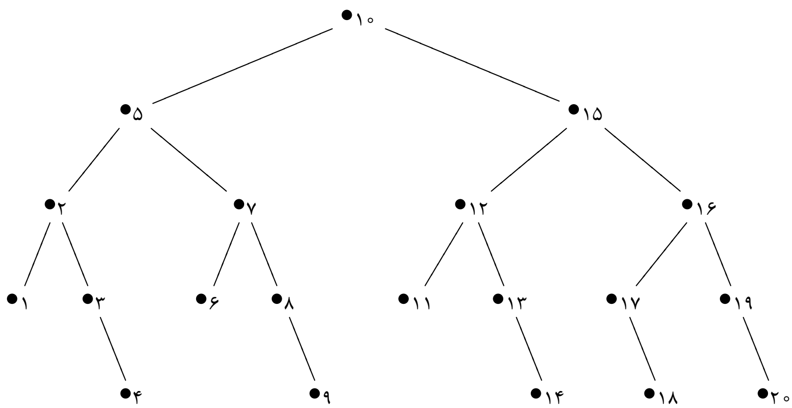
مرحله دوم چون $\mathrm{DOOR} < \mathrm{FOOT}$، پس زیردرخت چپ را با همان الگوریتم جستجو می‌کنیم. چون $\mathrm{DOOR} > \mathrm{BALL}$، پس به سمت راس CAR حرکت می‌کنیم.

مرحله سوم زیردرخت راست با ریشه CAR به کلمه DOOR ختم نمی‌شود. پس کلمه DOOR در این فهرست وجود ندارد.

ملاحظه می‌شود که اجرای این الگوریتم تنها سه کلمه کنترل شد. در حالی که در الگوریتم جستجوی ترتیبی، چهار بار کنترل کلمات لازم است. $\diamondsuit$

مثال ۲۸.۴ از بین اعداد ۱ تا ۲۰، عددی به دلخواه انتخاب می‌شود (مثلاً عدد ۱۸). با انجام چند سوال با پاسخ آری و نه، می‌توان این عدد را پیدا کرد؟

حل : ابتدا اعداد را در یک درخت دودویی متناظر می‌کنیم. این درخت چنین است (چرا).



با استفاده از الگوریتم پیش‌ترتیب، برای پاسخ به این سوال تنها سه سوال کافی است. ◇

الگوریتم ۸.۴ **(جستجوی پس‌ترتیب)**

گام اول زیردرخت چپ را با الگوریتم جستجوی پس‌ترتیب، مشخص کنید.

گام دوم زیردرخت راست را با الگوریتم جستجوی پس‌ترتیب، مشخص کنید.

گام سوم ریشه را مشخص کنید.

مثال ۲۹.۴ راس‌های درخت دودویی مثال ۲۶.۴ را بر اساس الگوریتم پس‌ترتیب مرتب کنید.

حل : ترتیب مورد نظر در مشخص کردن راس‌ها عبارت است از:

$$[D, B], [\,[G, E], [H, I, F], C], A.$$

◇

الگوریتم ۹.۴ **(جستجوی میان‌ترتیب)**

گام اول زیردرخت چپ را با الگوریتم جستجوی میان‌ترتیب، مشخص کنید.

گام دوم ریشه را مشخص کنید.

گام سوم زیردرخت راست را با الگوریتم جستجوی میان‌ترتیب، مشخص کنید.

مثال ۳۰.۴ راس‌های درخت دودویی مثال ۲۶.۴ را بر اساس الگوریتم میان‌ترتیب مشخص کنید.

حل : ترتیب مورد نظر در مشخص کردن راس‌ها عبارت است از:

$$[D, B], A, [\,[G, E], C, [H, F, I]\,].$$

$\diamondsuit$

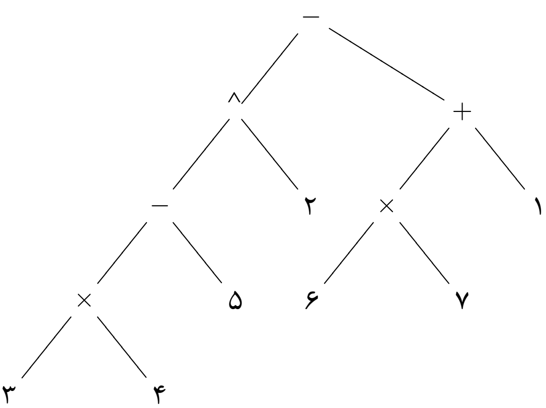
روش پیش‌ترتیب در نوشتن عبارت‌های جبری و اولویت‌بندی در اجرای اعمال ریاضی در برخی ماشین حساب‌های جیبی به کار می‌رود و طراحی مدارها چنان است که انجام اَعمال ریاضی بر اساس الگوریتم پیش‌ترتیب است. به عنوان مثال، عبارت جبری

$$(((۳ \times ۴) - ۵)\hat{}۲) - ((۶ \times ۷) + ۱)$$

که در آن $\hat{}$ برای انجام عمل توان در نظر گرفته شده است، را در نظر بگیرید. در ماشین حساب‌هایی که از روش **نماد لهستانی معکوس**[۱۳] [۴] استفاده می‌کنند، برای محاسبه این عبارت، ترتیب فشار دادن دگمه‌ها باید به صورت زیر باشد:

$$۵, -, ۲, \times, ۳, ۴, \hat{}, ۶, ۷, \times, ۱, +, -$$

و درخت دودویی متناظر با الگوریتم پیش‌ترتیب به صورت زیر است:



زبان برنامه‌نویسی FORTH [۲۹] نیز از این روش برای نوشتن عبارت‌های جبری استفاده می‌کند. بنابراین، حاصل این عبارت ۶ است (تحقیق کنید). در نماد لهستانی معکوس، برای مشخص کردن اولویت اجرای عمل‌ها نیازی به استفاده از پرانتز نیست.

کاربرد دیگری از روش‌های جستجو، مرتب کردن است. منظور از مرتب کردن، قرار دادن اعضای یک دنباله در یک ترتیب خاص است. به عنوان مثال، در مجموعه‌ای از اعداد (یا تعدادی کلمات)، منظور از مرتب کردن اعداد یعنی قرار دادن آنها در ترتیب صعودی یا نزولی (یا قرار دادن کلمات در ترتیب الفبایی). برای توصیف بهتر، این کار را در مثال بعدی انجام می‌دهیم.

مثال ۳۱.۴ اعداد زیر را به صورت صعودی مرتب کنید:

$$۶, ۲, ۹, ۴, ۱۵, ۱, ۱۲, ۷, ۲۰, ۱۰, ۳, ۱۱.$$

حل : برای مرتب کردن این اعداد به صورت الگوریتمی عمل می‌کنیم.

[۱۳] Reverse Polish Notation

گام اول اولین عدد را در ریشه درخت دودویی قرار دهید.

گام دوم عدد بعدی را در لیست اعداد بخوانید.

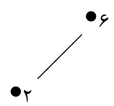
گام سوم اگر عدد خوانده شده کوچک‌تر از ریشه باشد، در زیردرخت چپ و در غیر این صورت، در زیردرخت راست به ریشه متصل کنید.

گام چهارم اگر زیردرخت چپ یا زیردرخت راست، خود ریشه باشند، گام سوم را برای این زیردرخت‌ها انجام دهید.

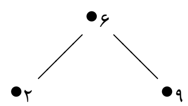
گام پنجم اگر تمامی اعداد خوانده شده‌اند، آنگاه با استفاده از الگوریتم میان‌ترتیب، راس‌های درخت را مشخص کنید. در غیر این صورت به گام دوم برگردید.

توجه داشته باشید که با اجرای این الگوریتم، درخت دودویی رشد کرده و به حداکثر مقدار رشد خود می‌رسد. با اجرایی این الگوریتم، دنباله درخت‌هایی که با رشد کردن به وجود می‌آیند به صورت زیر است:

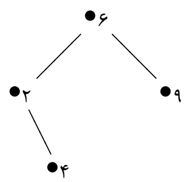
(a)



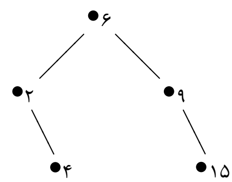
(b)



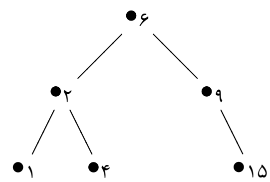
(c)



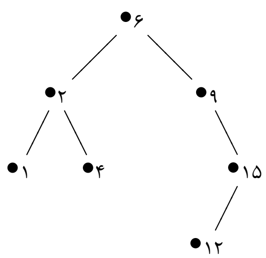
(d)



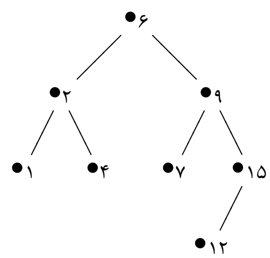
(e)



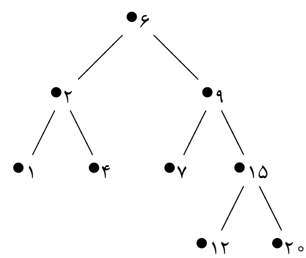
(f)



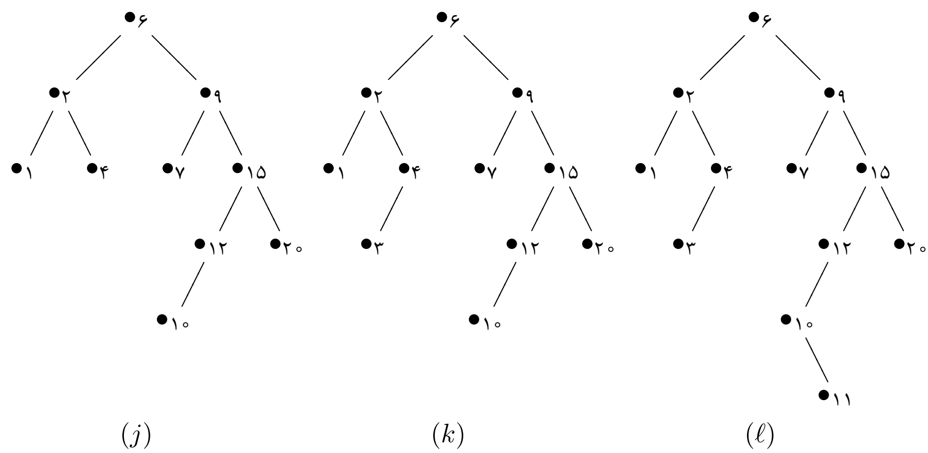
(g)



(h)



(i)



درخت دودویی نهایی (ℓ) است. اینک با استفاده از الگوریتم میان‌ترتیب، جستجو و مشخص کردن راس‌های درخت را انجام می‌دهیم. داریم:

$$۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۷, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۵, ۲۰,$$

و این یک دنباله صعودی است. $\diamondsuit$

می‌توان روش برچسب زدن راس‌ها و ایجاد درخت را چنان در نظر گرفت که از روش‌های دیگر جستجو و مرتب‌سازی استفاده کرد. توجه داشته باشید، سرعت روش مرتب کردن فوق‌الذکر از روش جستجوی ترتیبی به مراتب بیشتر است.

تمرین ۴.۴

۱. در یک درخت ریشه‌دار، پدربزرگ و نوه را تعریف کنید. اگر در یک درخت ریشه‌دار، هر راس حداکثر m فرزند داشته باشد، آنگاه حداکثر تعداد نوه‌ها برای یک راس چند است؟

۲. بزرگ‌ترین عدد صحیح h که در هر درخت ریشه‌دار، راسی از تراز h موجود باشد، **ارتفاع** درخت ریشه‌دار گفته می‌شود. فرض کنید $\mathcal{T}$ یک درخت دودویی با ارتفاع h و تعداد راس‌های p است. در این صورت

$$\begin{aligned} h+۱ \quad &\le p \quad \le ۲^{h+۱}-۱ \\ h \quad &\ge \quad [\log_۲ \frac{p+۱}{۲}]. \end{aligned} \tag{۱.۴}$$

۳. یک درخت ریشه‌دار با ارتفاع h را **متوازن** گویند هرگاه هر راس آویزان در تراز h یا $h-۱$ باشد. با توجه به این تعریف، نشان دهید نامساوی (۱.۴) برای درخت متوازن به تساوی تبدیل می‌شود.

۴. با استفاده از الگوریتم جستجوی دودویی مشخص کنید آیا کلمه MICHIGAN در لیست زیر موجود است.

ALABAMA- CALIFORNIA- DELAWARE- FLORIDA- GEORGIA- HAWAII- IDAHO- KENTACKY- LOUISIANA- MICHIGAN- NEVADA-OHIO.

۵. با استفاده از الگوریتم جستجوی ترتیبی یک لیست بیست نفری از اسامی را در نظر گرفته و آنها را به ترتیب الفبایی مرتب کنید.

۶. لیست اسامی دانشجویان کلاس را بر حسب شماره دانشجویی آنها به ترتیب صعودی مرتب کنید.

۷. ابتدا عبارت‌های جبری زیر را روی یک درخت دودویی نمایش داده و سپس آن را به صورت یک عبارت «نماد لهستانی معکوس» بنویسید.

(آ) $((A - D) \times ((A + B) - D)$

(ب) $۴۲\,\hat{}\,۴ + ۱۰ + ۱۶ + ۳۶ \times ۵۲\,\hat{}\,۳$

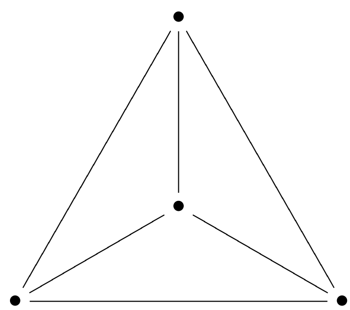
۸. الگوریتمی برای برچسب زدن راس‌های یک درخت دودویی بیان کنید که برای مرتب کردن راس‌های درخت برای اعداد داده شده، از الگوریتم جستجوی پس‌ترتیب استفاده کند.

۹. تمرین قبلی را برای حالتی که بتوان از الگوریتم جستجوی پیش‌ترتیب استفاده کرد؛ حل کنید.

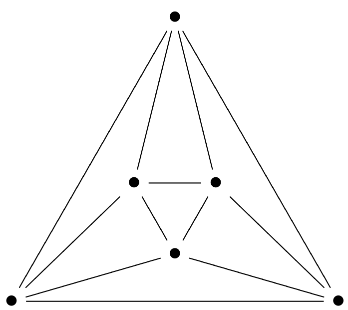
۵.۴ گراف‌های مسطح

گراف G را **مسطح** گویند هرگاه بتوان نمودار آن را در یک صفحه رسم کرد، طوری که یال‌ها تنها در راس‌ها همدیگر را قطع کنند. در شبکه خیابان‌های شهر، مفهوم مسطح بودن متناظر با عدم وجود روگذر و زیرگذر است.

مثال ۳۲.۴ گراف‌های زیر مسطح هستند.

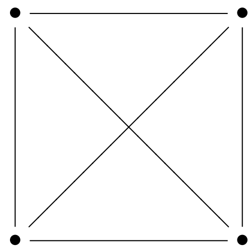


گراف G_2



گراف G_1

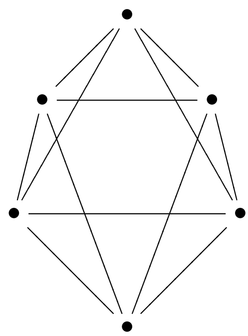
در بعضی موارد به نظر می‌رسد که یک گراف مسطح نیست، در حالی که می‌توان گراف یکریخت با آن را چنان رسم کرد که مسطح باشد. به عنوان مثال گراف G_2 با گراف G_3 یکریخت است. پس G_3 نیز مسطح است.



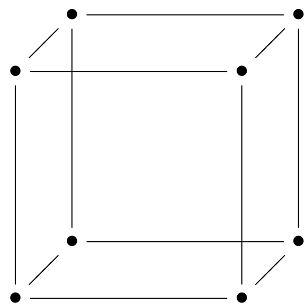
گراف G_3

بررسی مسطح بودن یک گراف، یکی از مسایل مهم نظریه گراف است. ابتدا چند تعریف دیگر را ارائه می‌دهیم . سپس دو آزمون در مورد مسطح بودن و یا مسطح نبودن گراف بیان می‌کنیم.

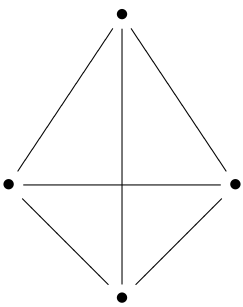
وجه در یک گراف، ناحیه‌ای است که با یک دور از یال‌های گراف محصور شده است. این وجه ممکن است بی‌کران باشد. مفهوم وجه از چندوجهی‌های هندسی تداعی می‌شود. در شکل بعدی، چهار وجهی، شش وجهی و هشت وجهی را ملاحظه می‌کنید.



هشت وجهی

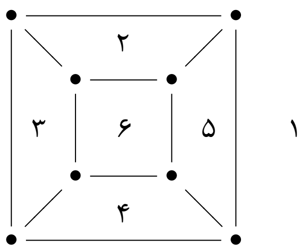


شش وجهی



چهار وجهی

گراف‌های G_1 و G_2 از مثال ۳۲.۴ به ترتیب مسطح شده هشت وجهی و چهار وجهی هستند. مسطح شده یک شش وجهی به صورت زیر است (۳ـ مکعب).



توجه کنید که در حالت مسطح، همواره یکی از وجه‌ها بی‌کران است. در شکل قبلی، وجه شماره ۱ بی‌کران است.

قضیه ۱۱.۴ (قضیه مشخصه اویلر) *فرض کنید G یک گراف مسطح با v راس، e یال و f وجه است. در این صورت رابطه زیر برقرار است:*

$$v - e + f = ۲.$$

برهان: برهان را با استقرا روی f انجام می‌دهیم. فرض کنید $f = ۱$. چون تنها یک وجه وجود دارد، پس این گراف هیچ دوری ندارد؛ زیرا اگر دوری موجود باشد، آنگاه دو وجه (داخل و خارج دور) وجود دارد. پس، این گراف یک درخت است و در هر درخت $e = v - ۱$. پس

$$v - e + f = v - (v - ۱) + ۱ = ۲.$$

برای $f \geq ۲$، فرض کنید قضیه برای تعداد $f - ۱$ وجه برقرار است. چون $f \geq ۲$، پس حداقل یک دور وجود دارد. یالی دلخواه از این دور را انتخاب می‌کنیم. این یال قسمتی از مرز دو وجه است و با حذف این یال، دو وجه به هم چسبیده و یک وجه بزرگ‌تر ایجاد می‌کنند، در حالی که هنوز گرافی مسطح با v راس، $e - ۱$ یال و $f - ۱$ وجه وجود دارد. در نتیجه

$$v - (e - ۱) + (f - ۱) = ۲.$$

پس $v - e + f = ۲$ و به این ترتیب برهان کامل می‌شود.

نتیجه ۸ *فرض کنید G یک گراف ساده و مسطح است. در این صورت با فرض $e \geq ۳$ داریم:*

$$۳f \leq ۲e, \quad e \leq ۲v - ۶.$$

برهان: چون G یک گراف ساده است پس هر وجه حداقل با سه یال محصور می‌شود. هر یال دو بار به عنوان مرز در نظر گرفته می‌شود. پس $۲e \leq ۳f$. از قضیه ۱۱.۴ داریم:

$$۲ = v - e + f \leq v - e + \frac{۲}{۳}e = v - \frac{۱}{۳}e.$$

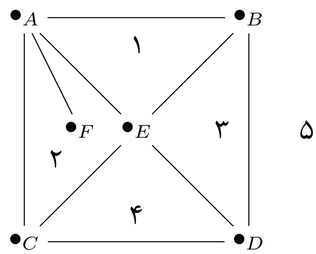
پس $e \leq ۳v - ۶$.

از نتیجه قبلی می‌توان چنین استنتاج کرد که اگر در یک گراف تعداد یال‌ها و راس‌ها در رابطه $e \leq ۳v - ۶$ صدق نکنند، آن گراف مسطح نیست.

فرض کنید G یک گراف ساده است. طول کوتاه‌ترین دور در G را **کمر (محیط)** گراف می‌نامند و آن را با g نشان می‌دهند. اگر یک گراف دوری نداشته باشد، کمر گراف را تعداد یال‌های آن گراف در نظر می‌گیرند.
کمر یک شش وجهی $g = ۴$ و کمر یک چهار وجهی و یک هشت وجهی $g = ۳$ است. کمر یک درخت با تعداد یال‌های آن برابر است.

قضیه ۱۲.۴ *در یک گراف مسطح با $g \geq ۳$؛ داریم:* $e \leq \frac{g}{g-۲}(v - ۲)$.

برهان: استدلال را روی یک گراف مسطح توصیف می‌کنیم. گراف زیر یک گراف مسطح با $v = ۶$ راس، $e = ۹$ یال و $f = ۵$ وجه است.



وجه‌های این گراف را شماره‌گذاری می‌کنیم و ماتریس وقوع یال_وجه را $B = (b_{ij})$ می‌نامیم. مولفه b_{ij} مساوی یک است اگر یال i_ام متعلق به وجه jام باشد. در غیر این صورت، $b_{ij} = ۰$. در نتیجه:

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ AB \\ AC \\ AE \\ AF \\ BD \\ BE \\ CD \\ CE \\ DE \end{array}$$

تعداد ۱ها در هر سطر ۱ یا ۲ است؛ زیرا هر یال یا در داخل یک وجه قرار دارد، مانند یال AF که در داخل وجه شماره ۲ است؛ و یا در مزر دو وجه قرار دارد. بنابراین، حداکثر مجموع سطرها مساوی ۱۸ است، یعنی دو برابر تعداد یال‌ها. همچنین هر ستون حداقل ۳ یک دارد، زیرا هر وجه حداقل با سه یال مشخص می‌شود. پس حداقل مجموع ستون‌ها ۱۵ است؛ یعنی سه برابر تعداد وجه‌ها. تعداد یک‌ها در این ماتریس بین این دو عدد قرار دارد. یعنی

$$۱۵ \leq ۱۷ \leq ۱۸.$$

کمترین مجموع ستون‌ها، مقدار g را مشخص می‌کند. بنابراین

$$gf \leq ۲e.$$

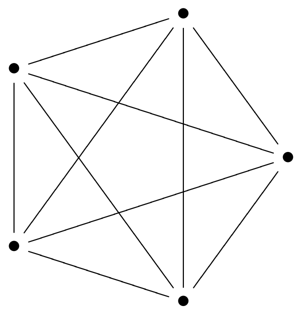
چون گراف مسطح است، پس

$$gf = g(e - v + ۲) \leq ۲e.$$

پس $e \leq \dfrac{g}{g-۲}(v - ۲)$. توجه کنید که اگر $g = ۳$ باشد، نتیجه قبلی حاصل می‌شود.

نتیجه ۹ *گراف $K_۵$ مسطح نیست.*

برهان: گراف $\mathcal{K}_{5}$ به صورت زیر است.



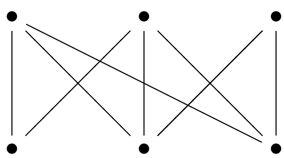
در این گراف، تعداد راس‌ها $v = 5$، تعداد یال‌ها $e = \frac{1}{2}v(v-1) = 10$ است. همچنین $g = 3$. پس اگر گراف مسطح باشد باید داشته باشیم:

$$10 \leq \frac{3}{3-2}(5-2) = 9$$

که درست نیست.

نتیجه ۱۰ *گراف دوبخشی کامل $\mathcal{K}_{3,3}$ مسطح نیست.*

برهان: این گراف به صورت زیر است:



این گراف $v = 3 + 3 = 6$ راس و $e = 3 \times 3 = 9$ یال دارد. همچنین، کمر این گراف $g = 4$ است (چرا؟). پس اگر گراف مسطح باشد باید داشته باشیم:

$$9 \leq \frac{4}{4-2}(6-2) = 8,$$

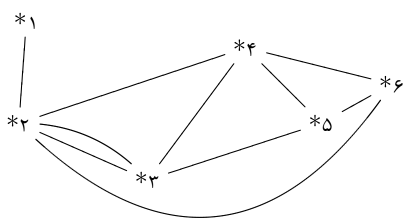
که درست نیست.

نتیجه ۱۱ *هر گرافی که شامل یک زیرگراف یکریخت با $\mathcal{K}_{5}$ یا $\mathcal{K}_{3,3}$ است، مسطح نیست. حالت کلی این نتیجه به نام قضیه کراتوسکی*[14] *مشهور است و به صورت شرط لازم و کافی بیان می‌شود.*

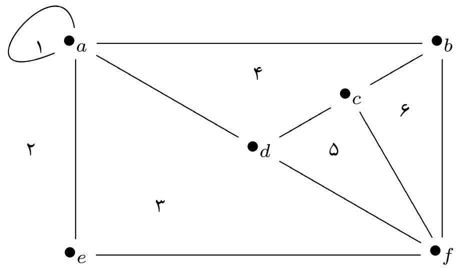
[14] Kazimierz Kuratowski (1896-1980)

دوگان گراف

فرض کنید G یک گراف همبند و مسطح است. نقطه‌ای را درون هر وجه از G در نظر بگیرید و دو نقطه‌ای را که وجه‌های متناظر آنها k یال مشترک (مرز مشترک) دارند، با k یال به هم وصل کنید. گراف حاصل را **دوگان** گراف G می‌نامند و با G^d نشان می‌دهند. در شکل بعدی یک گراف مسطح (G) و دوگان آن (G^d) رسم شده‌است.



دوگان گراف$G = G^d$



گراف G

در گراف‌های دوگان خاصیت‌های زیر برقرار هستند.

خاصیت ۱ : یک راس با درجه دو در G موجب به وجود آمدن دو یال بین دو راس در G^d می‌شود. پس G^d ممکن است چندگراف باشد. در مثال قبلی، راس e بر یال‌های $\{a, e\}$ و $\{e, f\}$ قرار دارد و این دو یال هر دو در مرز بین دو وجه ۲ و ۳ را تشکیل می‌دهند. پس در G^d دو یال بین دو راس ۲ و ۳ قرار دارد.

خاصیت ۲ : وجود طوقه در G، موجب به وجود آمدن یال معلق در G^d می‌شود. همچنین، هر یال معلق در G، یک طوقه در G^d ایجاد می‌کند.

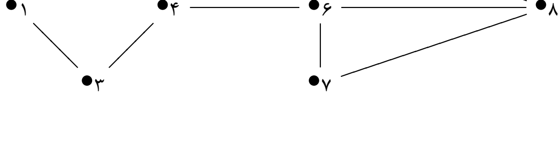
خاصیت ۳ : درجه هر راس در G^d برابر تعداد یال‌های مرزی ناحیه متناظر در G است که این راس را شامل می‌شود. بنابراین حداقل درجه راس‌ها در G^d همان کمر G است.

تذکر ۲ *ممکن است دو گراف یکریخت باشند در حالی که دوگان‌های آنها یکریخت نیستند.*

مجموعه برش

گراف همبند $G = (V, E)$ را در نظر بگیرید. زیرمجموعه E' از E را یک **مجموعه برش** گویند هرگاه با حذف یال‌های E' از گراف E؛ گراف $G - E'$ همبند نباشد.

مثال ۳۳.۴ گراف همبند زیر را در نظر بگیرید.



هر یک از مجموعه یال‌های زیر یک برش در این گراف است:

$$\{\{۲,۴\},\{۱,۳\}\},\{\{۱,۲\},\{۳,۴\}\},\{\{۴,۶\}\},\{\{۶,۸\},\{۵,۸\},\{۷,۸\}\}.$$

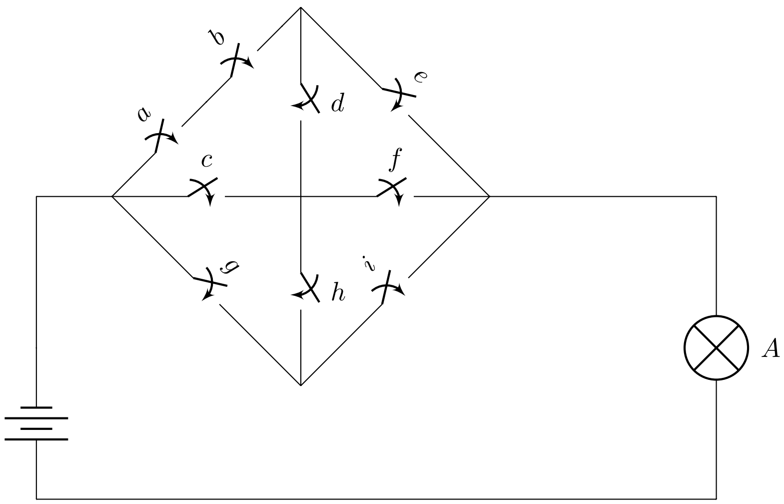
نتیجه ۱۲ *هر برش با n ($n \geq ۳$) یال در G، با یک برش با n یال در G^d متناظر است.*

نتیجه ۱۳ *هر طوقه در G با یک برش تک‌عضوی در G^d متناظر است و برعکس.*

نتیجه ۱۴ *اگر G یک چندگراف مسطح باشد، آنگاه هر دور شامل دو یال در G، با یک برش دوعضوی در G^d متناظر است.*

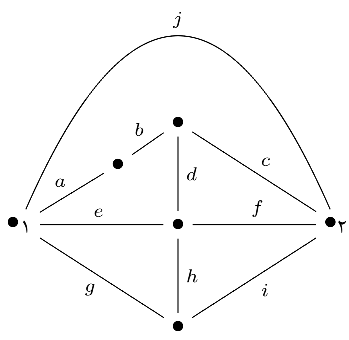
در ادامه کاربردی از دوگان گراف را مشاهده می‌کنیم.

مثال ۳۴.۴ یک مدار الکتریکی با ۹ کلید برای روشن شدن لامپ A را به صورت زیر در نظر بگیرید.

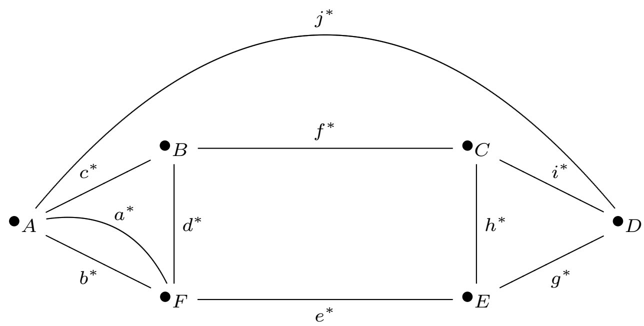


می‌خواهیم مدار دوگانی برای روشن کردن لامپ دیگری مانند B طراحی کنیم به طوری که A روشن است فقط و فقط وقتی که B خاموش باشد.

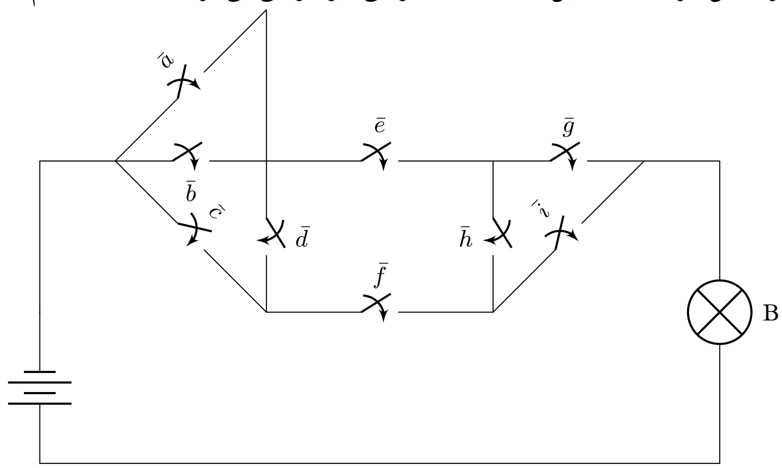
حل : گراف معادل با این مدار الکتریکی را رسم می‌کنیم. راس‌های ۱ و ۲ با انتهای مدار الکتریکی متناظر هستند.



یال a در این گراف به مفهوم عبور جریان از کلید a این مدار است. برای طراحی مدار الکتریکی مورد نظر، ابتدا دوگان این گراف را رسم می‌کنیم.



بر اساس گراف دوگان این مدار، مدار الکتریکی زیر طراحی می‌شود که در آن $\bar{a}$ متمم کلید a است.



$\diamondsuit$

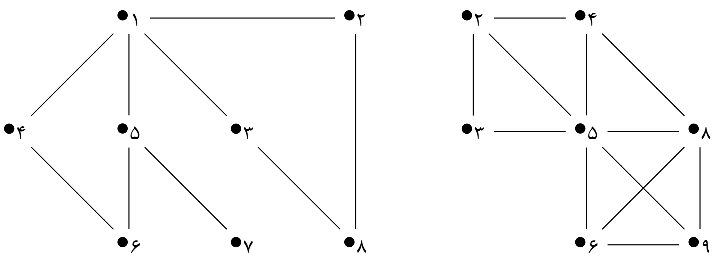
تمرین ۵.۴

۱. فرض کنید گراف $G = (V, E)$ مسطح، همبند و ساده است، طوری که برای هر $v \in V$، $\deg v = ۴$. اگر $|E| = ۱۶$ باشد، این گراف چند وجه دارد؟ چرا؟

۲. ثابت کنید اگر گراف G، مسطح، همبند و ساده باشد، آنگاه راسی مانند v در G وجود دارد که $\deg v < ۶$.

۳. فرض کنید $G = (V, E)$ گرافی همبند و ساده است و $|V| \geq ۱۶$. ثابت کنید گراف G یا مکمل آن نامسطح است. برای $|V| = ۸$ یک مثال نقض بیاورید.

۴. دوگان گراف‌های زیر را رسم کرده و در مورد مسطح بودن دوگان آنها قضاوت کنید .



۵. گراف نامسطحی با p راس و $۳p - ۶$ یال رسم کنید.

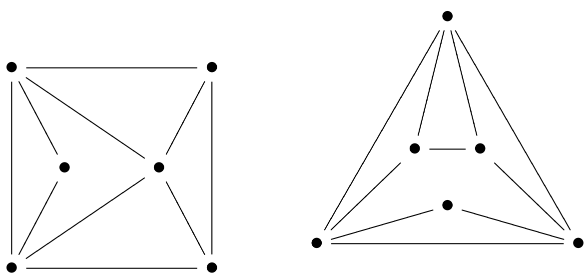
۶. گراف مسطح ساده‌ای با حداقل ۵ راس رسم کنید.

۷. فرض کنید G یک گراف مسطح و ساده با تعداد راس‌های کمتر از ۱۲ است. ثابت کنید راسی مانند v در G وجود دارد که $\deg v \leq ۴$.

۸. فرض کنید G یک گراف مسطح با n راس، e یال، f وجه و k مولفه است. ثابت کنید $n - e + f = k + ۱$.

۹. فرض کنید G گرافی با n راس، e یال و حداقل یک وجه است که این وجه مثلث نیست. ثابت کنید می‌توان حداکثر $۳n - e - ۶$ یال به G اضافه کرد در حال که گراف هنوز همبند و مسطح است.

۱۰. نشان دهید دو گراف زیر یکریخت هستند در حالی که دوگان‌های آنها یکریخت نیستند.



۱۱. شرط لازم برای این که یک گراف با دوگان خود یکریخت باشد، چیست؟

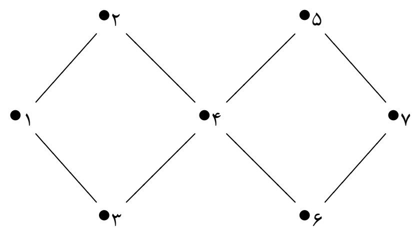
۶.۴ رنگ‌آمیزی گراف و چندجمله‌ای رنگ

در نظریه گراف، رنگ‌آمیزی گراف حالت خاصی از برچسب‌گذاری گراف است که به عناصر گراف برچسب‌هایی را نسبت می‌دهد که به طور سنتی این برچسب‌ها را رنگ می‌نامند. رنگ‌آمیزی راس‌ها، یال‌ها و وجه‌های گراف، کاربردهای مختلفی در زندگی واقعی دارند. مساله تنظیم برنامه و زمان‌بندی یکی از این کاربردها است [۳۵، ۱۰]. در مساله زمان‌بندی، مجموعه‌ای از محدودیت‌ها در انجام کارها

وجود دارند. به عنوان مثال، در تنظیم برنامه درسی کلاس‌ها در دانشگاه، دو درس نباید توسط یک استاد در یک زمان ارائه شود (عدم همرمانی دروس برای استاد) و یا برای یک گروه مشخص از دانشجویان در یک زمان مشخص، نباید دو درس متفاوت ارائه شود (عدم همزمانی دروس برای دانشجویان). مساله یافتن حداقل دوره زمانی برای این زمان‌بندی، با در نظر گرفتن چنین محدودیت‌هایی، همان مساله رنگ‌آمیزی گراف است. برای مطالعه بیشتر در مورد رنگ آمیزی گراف‌ها، خواننده علاقمند را به کتاب‌های تخصصی‌تر از جمله [۲۶، ۱۸] ارجاع می‌دهیم. در اینجا رنگ‌آمیزی را به طور مختصر مطرح می‌کنیم. ابتدا مفهوم مجموعه‌های مستقل را معرفی کرده و سپس، ارتباط آنها با مساله رنگ‌آمیزی را بیان می‌کنیم.

زیرمجموعه S از مجموعه یال‌های گراف G را **مستقل** گویند هرگاه هیچ دو عضو از این مجموعه مجاور نباشند، یعنی روی یک یال قرار نداشته باشند.

مثال ۳۵.۴ در گراف زیر مجموعه‌های مستقل را مشخص کنید.



حل : مجموعه‌های $S_۱ = \{۲, ۳, ۵, ۶\}$ و $S_۲ = \{۱, ۴, ۷\}$ مستقل هستند. ◊

مثال ۳۶.۴ فرض کنید قرار است n ماده شیمیایی $c_۱, c_۲, \dots, c_n$ در انباری نگهداری شوند. با توجه به خواص شیمیایی مواد، برخی از آنها نباید در کنار هم قرار گیرند. حداقل تعداد قفسه‌ها در این انبار با رعایت شرط فوق چند است؟

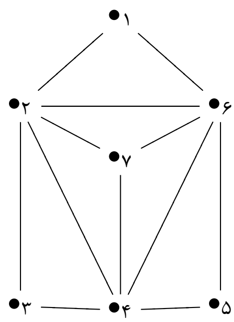
حل : برای حل این مساله، از گراف متناظر استفاده می‌شود. در این گراف، هر راس متناظر با یک ماده شیمیایی است و دو راس فقط زمانی مجاور هستند (روی یک یال قرار دارند) که امکان ترکیب با هم را داشته باشند. در این صورت، مواد شیمیایی موجود در هر قفسه انبار با یک مجموعه مستقل S از راس‌های گراف G متناظر است. پس، جواب مساله عبارت است از افراز راس‌ها به مجموعه‌های مستقل و حداقل تعداد قفسه‌ها زمانی مشخص می‌شود که تعداد اعضای این افراز کمترین است. ◊

مثال ۳۷.۴ می‌خواهیم یک اکواریم بسازیم. بنا به دلایل زیستی، امکان نگهداری انواع ماهی‌ها در یک مخزن وجود ندارد. اگر امکان قرار دادن دو گونه ماهی در یک مخزن وجود نداشته باشد، آنها را ناسازگار گویند. حداقل تعداد مخازن لازم برای این اکواریم چگونه تعیین می‌شود؟

حل : همانند مثال ۳۶.۴، از گراف متناظر و مجموعه‌های مستقل استفاده می‌کنیم. در گراف متناظر، هر راس با گونه‌ای ماهی متناظر است و دو راس با هم مجاور هستند اگر و فقط اگر، گونه ماهی‌های متناظر ناسازگار باشند. ◊

مجموعه مستقل S از راس‌های گراف G را مجموعه مستقل **ماکزیمال** گویند هرگاه زیرمجموعه محض هیچ مجموعه مستقل دیگر نباشد. تعداد اعضای مجموعه مستقل ماکزیمال با بیشترین عضو را **عدد استقلال** گراف می‌نامند و با $\beta(G)$ نشان می‌دهند. هر مجموعه مستقل با تعداد اعضای $\beta(G)$ ماکزیمال است در حالی که عکس مطلب درست نیست. در مثال ۳۷.۴، $\beta(G)$ عبارت است حداکثر تعدادی از انواع ماهی که با هم سازگار هستند.

مثال ۳۸.۴ در گراف زیر $\beta(G)$ را مشخص کنید.



حل : تعدادی از مجموعه‌های مستقل در این گراف عبارتند از:

$$\begin{aligned} S_۱ &= \{۱,۳,۵,۷\} \\ S_۲ &= \{۲,۵\} \\ S_۳ &= \{۱,۵,۶,۷\} \\ S_۴ &= \{۱,۴\} \\ S_۵ &= \{۱,۲,۳,۷\} \\ S_۶ &= \{۳,۶\}. \end{aligned}$$

علاوه بر این مجموعه‌های مستقل، مجموعه‌های مستقل دیگری نیز وجود دارند. در این گراف $\beta(G) =$ ۴. $\diamondsuit$

برای حل مثال‌های ۳۶.۴ و ۳۷.۴ و مسایل مشابه؛ می‌توان مفهوم رنگ‌آمیزی راس‌های گراف را ارائه کرده و از آن استفاده نمود.

رنگ‌آمیزی مناسب راس‌های یک گراف یعنی نسبت دادن رنگ‌ها به راس‌های آن به طوری که دو راس مجاور همرنگ نباشند. اگر برای رنگ‌آمیزی مناسب یک گراف n رنگ لازم باشد، آن گراف را nـ رنگ‌آمیزی شونده می‌نامند و این کار را nـ رنگ‌آمیزی گویند. به طور خلاصه؛ هر رنگ‌آمیزی مناسب یک گراف را **رنگ‌آمیزی** می‌گویند. کمترین تعداد رنگ‌های لازم برای رنگ‌آمیزی گراف G را **عدد رنگ** برای گراف G می‌نامند و با نماد $\chi(G)$ نشان می‌دهند.

مثال ۳۹.۴ هر گراف دوبخشی، ۲ـ رنگ‌آمیزی شونده است زیرا کافی است مجموعه راس‌های افراز شده را به ترتیب با دو رنگ داده شده، یک در میان، رنگ‌آمیزی کرد. همچنین گراف کامل $\mathcal{K}_n$؛ nـ رنگ‌آمیزی شونده است زیرا هر راس با تمامی $n - ۱$ راس دیگر مجاور است.

مساله رنگ‌آمیزی نقشه‌های جغرافیایی از سال ۱۸۵۰ به عنوان مساله چهار- رنگ مطرح بود که حل آن در سال ۱۹۷۶ توسط هاکن[۱۵] و کنث[۱۶] ارائه شد [۱]. این قضیه به صورت زیر است:

[۱۵] Haken
[۱۶] Kenneth

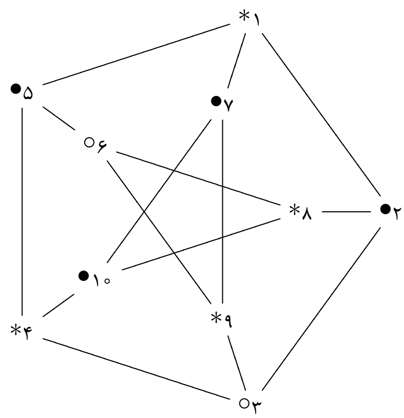
قضیه چهار رنگ:

هر گراف مسطح ۴ـ رنگ‌آمیزی شونده است.

به عبارت دیگر، برای رنگ‌آمیزی هر نقشه جغرافیایی که هیچ دو کشور مجاور همرنگ نباشند، چهار رنگ کافی است. توجه کنید که این قضیه تنها برای گراف‌های مسطح برقرار است و ممکن است برای گراف‌های نامسطح بیش از چهار رنگ و یا کمتر از چهار رنگ لازم باشد.

با توجه به مفهوم مجموعه‌های مستقل، حداقل تعداد رنگ‌های مورد نیاز برای رنگ‌آمیزی یک گراف، برابر حداقل اعضای یک افراز از مجموعه‌های مستقل برای مجموعه راس‌های گراف است.

مثال ۴۰.۴ گراف پترسون را در نظر بگیرید. با استفاده از مجموعه‌های مستقل نشان دهید این گراف ۳ـ رنگ‌آمیزی شونده است. توجه کنید که این گراف مسطح نیست.



حل : مجموعه راس‌های $V = \{۱, ۲, \ldots, ۱۰\}$ را به سه مجموعه مستقل زیر افراز می‌کنیم:

$$\begin{aligned} S_۱ &= \{۱, ۴, ۸, ۹\} \\ S_۲ &= \{۲, ۵, ۷, ۱۰\} \\ S_۳ &= \{۳, ۶\}. \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

تذکر ۳ *اگر دو گراف $G_۱$ و $G_۲$ یکریخت باشند آنگاه* $\chi(G_۱) = \chi(G_۲)$.

چندجمله‌ای رنگ

روش دیگر برای یافتن عدد رنگ، استفاده از چندجمله‌ای رنگ است[۳]. فرض کنید G یک گراف و λ عدد صحیح و مثبت و برابر با تعداد رنگ‌های موجود برای رنگ‌آمیزی راس‌های این گراف است. چندجمله‌ای $P(\lambda, G)$ بر حسب متغیر λ را که مشخص کننده تعداد روش‌های گوناگون رنگ‌آمیزی راس‌های گراف G با حداکثر λ رنگ است، **چندجمله‌ای رنگ** برای گراف G نامند.

رنگ‌آمیزی مناسب گراف:

رنگ‌آمیزی تابعی مانند f است که حوزه تعریف آن راس‌های گراف و حوزه مقادیر آن مجموعه $\{۱, ۲, \ldots, \lambda\}$ است به طوری که برای راس‌های مجاور u و v، $f(u) \neq f(v)$. در این صورت؛ دو رنگ‌آمیزی را متفاوت گویند هرگاه توابع متناظر آنها مساوی نباشند.

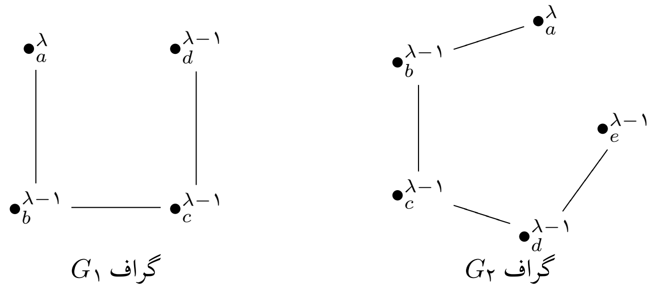
مثال ۴۱.۴ فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف با n راس است که هیچ یالی ندارد ($E = \varnothing$). در این صورت G از n راس منفرد تشکیل شده است و بنا بر اصل ضرب، اگر λ رنگ موجود باشد آنگاه $P(G, \lambda) = \lambda^n$.

مثال ۴۲.۴ برای رنگ‌آمیزی گراف کامل $\mathcal{K}_n$ ، حداقل n رنگ نیاز است و دوباره، بنا بر اصل ضرب، داریم:

$$P(\mathcal{K}_n, \lambda) = \lambda(\lambda - ۱)(\lambda - ۲) \cdots (\lambda - n + ۱),$$

که آن را با نماد $P(\mathcal{K}_n, \lambda) = \lambda^{(n)}$ نیز نمایش می‌دهند. برای هر $\lambda < n$، داریم: $P(\mathcal{K}_n, \lambda) = ۰$ و برای $\lambda = n = \chi(\mathcal{K}_n)$ ، داریم $P(\mathcal{K}_n, \lambda) > ۰$.

مثال ۴۳.۴ دو گراف زیر را در نظر بگیرید:



در گراف $G_۱$، راس a را می‌توان به λ روش مختلف رنگ‌آمیزی کرد. برای رنگ‌آمیزی b، می‌توان از $\lambda - ۱$ رنگ باقیمانده استفاده کرد. به همین ترتیب برای رنگ‌آمیزی راس‌های c و d نیز می‌توان از $\lambda - ۱$ رنگ مختلف استفاده کرد. پس بنا بر اصل ضرب، چندجمله‌ای رنگ برای گراف $G_۱$ عبارت است از

$$P(G_۱, \lambda) = \lambda(\lambda - ۱)^۳.$$

به همین ترتیب، چندجمله‌ای رنگ برای گراف $G_۲$ ، عبارت است از:

$$P(G_۲, \lambda) = \lambda(\lambda - ۱)^۴.$$

در حالت کلی اگر $G = \mathcal{P}_n$ یک مسیر با n راس باشد، آنگاه:

$$P(\mathcal{P}_n, \lambda) = \lambda(\lambda - ۱)^{n-۱}.$$

با توجه به این که چندجمله‌ای رنگ عددی صحیح و مثبت است؛ حداقل مقدار λ برای یک مسیر که مقدار چندجمله‌ای رنگ متناظر مثبت باشد $\lambda = ۲$ است. پس

$$\chi(G_۱) = \chi(G_۲) = \chi(\mathcal{P}_n) = ۲.$$

.

مثال ۴۴.۴ اگر G یک گراف ناهمبند با مولفه‌های $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_k$ باشد، بنا بر اصل ضرب داریم:

$$P(G, \lambda) = P(\mathcal{C}_1, \lambda) P(\mathcal{C}_2, \lambda) \cdots P(\mathcal{C}_k, \lambda).$$

ملاحظه می‌شود که از تجزیه مساله کلی به چندین مساله موضعی، روش حل مساله موضعی برای مساله کلی تعمیم می‌یابد.

قضیه ۱۳.۴ *برای هر گراف G، جمله ثابت در چندجمله‌ای رنگ وجود ندارد (جمله ثابت صفر است).*

برهان: برای هر گراف G، $\chi(G) > 0$، زیرا $V \neq \varnothing$. اگر $P(G, \lambda)$ جمله ثابت غیرصفری مانند a داشته باشد، آنگاه $P(G, 0) = a \neq 0$، یعنی a روش برای رنگ‌آمیزی راس‌های گراف G با تعداد صفر رنگ وجود دارد و این امکان‌پذیر نیست. پس $a = 0$.

قضیه ۱۴.۴ *برای گراف $G = (V, E)$ ، اگر $E \neq \varnothing$، آنگاه مجموع ضرایب چندجمله‌ای رنگ $P(G, \lambda)$ صفر است.*

برهان: چون $|E| \geq 1$، پس $\chi(G) \geq 2$. در نتیجه $P(G, 1) = 0$. حکم نتیجه می‌شود؛ چون مجموع ضرایب چند جمله‌ای $P(G, \lambda)$ مساوی $P(G, 1)$است.

قضیه ۱۵.۴ *(تجزیه چندجمله‌ای رنگ): اگر $G = (V, E)$ یک گراف همبند و $e \in E$ یالی دلخواه از G باشد، $G - e$ (حذف یال e از گراف G) را به طور خلاصه با G_e نمایش می‌دهیم. همچنین گراف حاصل از حذف یال e و انقباض دو راس مربوط به یال e را با نماد G'_e نشان می‌دهیم. در این صورت:*

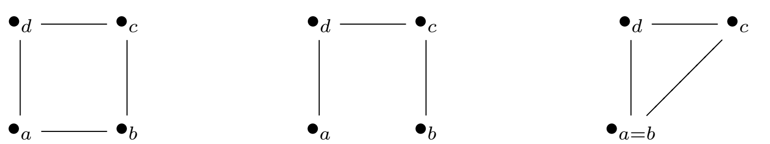
$$P(G, \lambda) = P(G_e, \lambda) - P(G'_e, \lambda).$$

برهان: فرض کنید $e = \{a, b\}$. تعداد روش‌های مختلف رنگ‌آمیزی با حداکثر λ رنگ متمایز برای گراف G_e عبارت است از $P(G_e, \lambda)$. ولی هر یک از این رنگ‌آمیزی‌ها که در آن a و b همرنگ هستند، یک رنگ‌آمیزی متناظر برای G'_e است و هر رنگ‌آمیزی G_e که در آن a و b همرنگ نیستند، یک رنگ آمیزی برای G است. در نتیجه بنا بر اصل جمع در شمارش،

$$P(G_e, \lambda) = P(G, \lambda) + P(G'_e \lambda).$$

با تغییر محل جمله‌ها در این رابطه حکم قضیه نتیجه می‌شود.

مثال ۴۵.۴ گراف G به صورت شکل زیر (شکل سمت چپ) را در نظر بگیرید.



گراف G گراف G_e گراف G'_e

داریم:

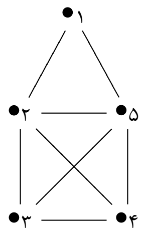
$$\begin{aligned} P(G_e,\lambda) &= \lambda(\lambda-1)^3 \\ P(G'_e,\lambda) &= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)=\lambda^{(3)}. \end{aligned}$$

پس

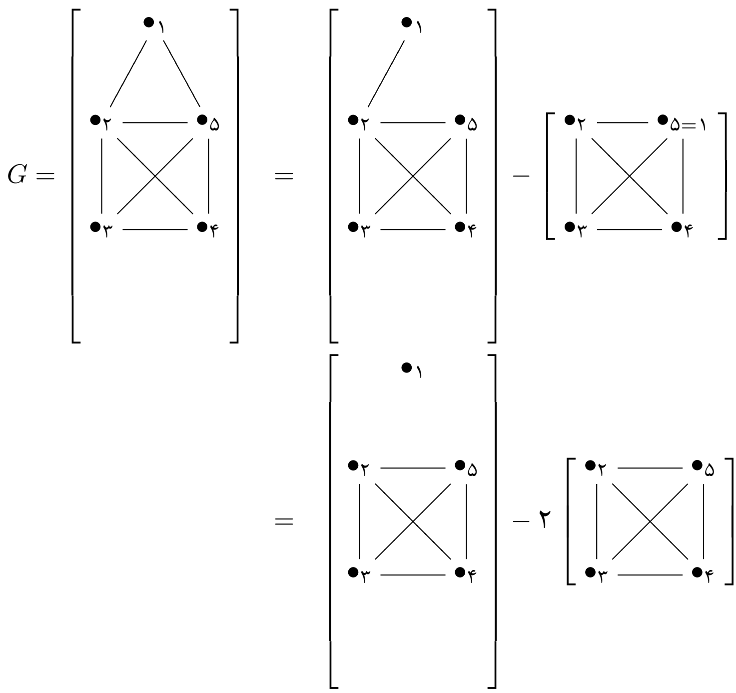
$$P(G,\lambda)=P(G_e,\lambda)-P(G'_e,\lambda)=\lambda(\lambda-1)^3-\lambda(\lambda-1)(\lambda-2).$$

ملاحظه می‌شود که $P(G,1)=0$ و برای $\lambda=2$؛ $P(G,\lambda)>0$. پس $\chi(G)=2$.

مثال ۴۶.۴ چندجمله‌ای رنگ را برای گراف زیر به دست آورید.



حل : چندجمله‌ای رنگ را برای یک گراف با رسم کروشه در اطراف گراف مشخص می‌کنیم. داریم:



پس بنا بر قضیه ۱۵.۴ و اصل ضرب داریم:

$$P(G,\lambda) = \lambda\lambda^{(۴)} - ۲\lambda^{(۴)} = (\lambda-۲)\lambda^{(۴)} = \lambda(\lambda-۱)(\lambda-۲)^۲(\lambda-۳).$$

برای $\lambda \leq ۳$، $P(G,\lambda)=۰$ و برای $\lambda \geq ۴$؛ $P(G,\lambda) > ۰$. پس $\chi(G)=۴$. ♢

قضیه ۱۶.۴ *فرض کنید G یک گراف و $G_۱$ و $G_۲$ زیرگراف‌های آن هستند طوری که*

$$G = G_۱ \cup G_۲, \quad \mathcal{K}_n = G_۱ \cap G_۲.$$

در این صورت:

$$P(G,\lambda) = \frac{P(G_۱,\lambda)P(G_۲,\lambda)}{\lambda^{(n)}}.$$

برهان: چون $G_۱ \cap G_۲ = \mathcal{K}_n$، پس $\mathcal{K}_n$ زیرگرافی در $G_۱$ و $G_۲$ بوده و بنابراین $\chi(G_۱) \geq n$ و $\chi(G_۲) \geq n$. با فرض وجود λ رنگ، $\lambda^{(n)}$ روش برای رنگ‌آمیزی $\mathcal{K}_n$ وجود دارد. برای هر یک از $\lambda^{(n)}$ روش، تعداد $\dfrac{P(G_۱,\lambda)}{\lambda^{(n)}}$ روش برای رنگ‌آمیزی بقیه راس‌های $G_۱$ وجود دارد. به همین ترتیب، برای رنگ‌آمیزی بقیه راس‌های $G_۲$ نیز $\dfrac{P(G_۲,\lambda)}{\lambda^{(n)}}$ روش مختلف وجود دارد. بنا بر اصل ضرب داریم:

$$P(G,\lambda) = P(\mathcal{K}_n)\frac{P(G_۱,\lambda)}{\lambda^{(n)}}\frac{P(G_۲,\lambda)}{\lambda^{(n)}} = \frac{P(G_۱,\lambda)P(G_۲,\lambda)}{\lambda^{(n)}}.$$

به این ترتیب حکم ثابت می‌شود.

مثال ۴۷.۴ گراف G در مثال ۴۶.۴ را در نظر بگیرید و فرض کنید $G_۱$ گراف حاصل از راس‌های $\{۲,۳,۴,۵\}$ و $G_۲$ نیز زیرگراف حاصل از راس‌های $\{۱,۲,۵\}$ است. آنگاه $G_۱ \cap G_۲$ گراف حاصل از دو راس $۲,۵$ و یال $\{۲,۵\}$ است. پس $G_۱ \cap G_۲ = \mathcal{K}_۲$. بنابراین

$$\begin{aligned} P(G,\lambda) &= \frac{P(G_۱,\lambda)P(G_۲,\lambda)}{\lambda^{(۲)}} = \frac{\lambda^{(۴)}\lambda^{(۳)}}{\lambda^{(۲)}} \\ &= \frac{\lambda^۲(\lambda-۱)(\lambda-۲)^۲(\lambda-۳)}{\lambda(\lambda-۱)} = \lambda(\lambda-۱)(\lambda-۲)^۲(\lambda-۳). \end{aligned}$$

این همان چندجمله‌ای است که در مثال ۴۶.۴ به دست آمد. ♢

در مورد چندجمله‌ای‌های رنگ، مسائل حل نشده زیادی وجود دارد. از جمله

- آیا هر چندجمله‌ای می‌تواند یک چندجمله‌ای رنگ برای گرافی باشد؟
- چه شرایطی برای یک چندجمله‌ای لازم است تا بتواند به عنوان چندجمله‌ای رنگ برای گرافی محسوب شود.

این بخش را با الگوریتمی برای رنگ‌آمیزی راس‌های یک گراف تمام می‌کنیم. این الگوریتم، در رده **الگوریتم‌های آزمند** است.

الگوریتم ۱۰.۴ گرافی با p راس در نظر بگیرید:

گام اول قرار دهید $i = ۱$. [این گام مقدار اولیه i (راس iـ‌ام) را مشخص می‌کند.]

گام دوم قرار دهید $c = ۱$. [این گام رنگی را که به راس iـ‌ام نسبت داده می‌شود مشخص می‌کند.]

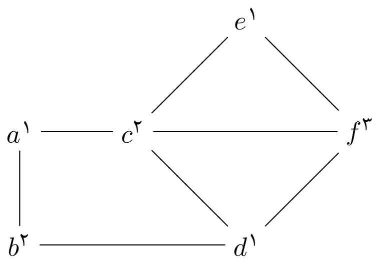
گام سوم الف رنگ‌هایی را که با راس iـ‌ام مجاور هستند را به صورت غیر نزولی مرتب کنید و در مجموعه L_i قرار دهید.

ب اگر رنگ شماره c در L_i موجود نباشد، آنگاه c را به راس iـ‌ام نسبت داده و به گام پنجم بروید. در غیر این صورت ادامه دهید [در این گام رنگی به راس iـ‌ام نسبت داده می‌شود که کمترین شماره را دارد].

گام چهارم قرار دهید $c := c + ۱$ و به گام (۳ـ ب) بروید. [در این گام شماره رنگ افزایش می‌یابد.]

گام پنجم اگر $i < p$، آنگاه $i := i + ۱$ و به گام دوم بروید. در غیر این صورت رنگ آمیزی انجام شده است. [در این گام پارامتر i افزایش یافته و رنگ‌آمیزی راس بعدی شروع می‌شود.]

مثال ۴۸.۴ گراف زیر را با الگوریتم ۱۰.۴ رنگ‌آمیزی کنید:



حل : بعد از اجرای الگوریتم، شماره رنگ‌ها در کنار راس‌ها نوشته شده‌اند. جزییات الگوریتم را کامل کنید. این گراف ۳ـ رنگ‌آمیزی شونده است. $\diamondsuit$

تمرین ۶.۴

۱. اگر $G = (V, E)$ یک گراف ساده و همبند باشد، عبارت زیر را ثابت کنید و یا با یک مثال رد کنید:

اگر G شامل دور باشد؛ آنگاه $P(G, \lambda)$ دارای عامل $\lambda - n$ است که در آن $n \geq ۲$ و $n \in \mathbb{Z}^+$.

۲. در گراف ساده G فرض کنید $\triangle = \max\{\deg v_i, v_i \in V\}$. ثابت کنید عدد رنگی گراف در رابطه $\chi(G) \leq \triangle + ۱$ صدق می‌کند. در چه گرافی تساوی برقرار است؟

۳. برای $n \geq ۳$ ، $\mathcal{C}_n$ را مداری با طول n در نظر بگیرید.

(آ) $P(\mathcal{C}_۳, \lambda)$ را مشخص کنید.

(ب) برای $n \geq ۴$ نشان دهید:

$$P(\mathcal{C}_n, \lambda) = P(L_n, \lambda) - P(\mathcal{C}_{n-۱}, \lambda),$$

که در آن L_n مسیری به طول $n - ۱$ است.

(ج) نشان دهید برای $n \geq ۲$، $P(L_n, \lambda) = \lambda(\lambda - ۱)^{n-۱}$.

(د) درستی روابط زیر را ثابت کنید:

(۱) برای $n \geq ۴$، $P(\mathcal{C}_n, \lambda) - (\lambda - ۱)^n = (\lambda - ۱)^{n-۱} - P(\mathcal{C}_{n-۱}, \lambda)$.

(۲) برای $n \geq ۵$، $P(\mathcal{C}_n, \lambda) - (\lambda - ۱) = P(\mathcal{C}_{n-۲}, \lambda) - (\lambda - ۱)^{n-۲}$.

(۳) برای $n \geq ۳$، $P(\mathcal{C}_n, \lambda) = (\lambda - ۱)^n + (-۱)^n(\lambda - ۱)$.

۴. برای $n \geq ۳$، چرخ $\mathcal{W}_n$ را در نظر بگیرید.

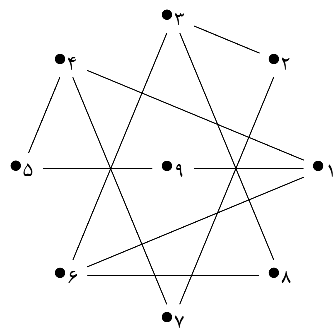
(آ) چه رابطه‌ای بین $\chi(\mathcal{C}_n)$ و $\chi(\mathcal{W}_n)$ وجود دارد؟

(ب) با استفاده از تمرین ۳ــ ج، ثابت کنید:

$$P(\mathcal{W}_n, \lambda) = \lambda(\lambda - ۲)^n + (-۱)^n(\lambda - ۲).$$

۵. اتاقی به قاعده پنج ضلعی است و k رنگ مختلف وجود دارد. به چند طریق می‌توان این اتاق را رنگ‌آمیزی کرد به طوری که هیچ دو دیوار همجوار همرنگ نباشند و همچنین سقف و هر دیوار نیز رنگ متفاوت داشته باشند.

۶. گراف زیر را با الگوریتم ۱۰.۴ رنگ آمیزی کنید و $\chi(G)$ را مشخص کنید.



۷. گراف مربوط به مثال ۳۵.۴ را رنگ‌آمیزی کنید و عدد رنگی آن را پیدا کنید. چندجمله‌ای رنگ آن را نیز بیابید.

۸. آیا الگوریتم ۱۰.۴ همواره می‌تواند عدد رنگ یک گراف را مشخص کند؟

۹. ثابت کنید یک گراف kــ رنگ‌آمیزی شونده است اگر و فقط اگر هر زیرگراف آن نیز kــ رنگ‌آمیزی شونده باشد.

فصل ۵

روابط بازگشتی

در این فصل ابتدا تابع گسسته، مشتق و انتگرال آن را معرفی می‌کنیم. در ادامه، معادله‌های بازگشتی را به عنوان معادلات دیفرانسیل گسسته بیان می‌کنیم. برای حل معادله‌های بازگشتی از روش‌های متداول در حل معادلات دیفرانسیل کمک می‌گیریم.

۱.۵ مشتق و انتگرال گسسته

تابع **گسسته حقیقی** تابعی است که دامنه آن اعداد طبیعی یا زیرمجموعه‌ای از آن است. چنین تابعی به صورت $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ یا به طور ساده با $f(n)$ که در آن $n\in\mathbb{N}$ است نشان داده می‌شود. در برخی موارد از f_n نیز استفاده می‌کنیم.

مشتق گسسته

اگر $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ یک تابع گسسته باشد؛ مشتق آن در نقطه n را به صورت

$$f'(n)=f(n+۱)-f(n),$$

تعریف می‌کنیم.

مثال ۱.۵ اگر a_n جمله عمومی یک تصاعد حسابی باشد داریم: $a_{n+۱}=a_n+d$. در این صورت $a'_n=a_{n+۱}-a_n=d$. $\diamondsuit$

می‌توانیم با استفاده از مفهوم مشتق گسسته معادله دیفرانسیل گسسته نیز تعریف کنیم. در این صورت هر معادله دیفرانسیل رابطه‌ای بین تابع گسسته و مشتقات آن است.

مثال ۲.۵ دنباله فیبوناتچی که سه جمله متوالی آن در رابطه $a_{n+۲}=a_{n+۱}+a_n$ صدق می‌کنند داده شده‌است. معادله دیفرانسیل گسسته‌ای که از این دنباله تولید می‌شود را بنویسید.

حل : چون $a'_{n+۱}=a_{n+۲}-a_{n+۱}=a_n$ بنابراین،

$$\begin{aligned} a'_{n+۱}-a'_n &= a_n-a'_n \\ a''_n &= a_n-a'_n. \end{aligned}$$

پس معادله دیفرانسیل گسسته متناظر به صورت $a''_n + a'_n - a_n = 0$ است که با دو شرط اولیه $a_1 = a_2 = 1$ جواب منحصر به فرد دارد. $\diamondsuit$

مشتق توابع گسسته خواصی دارد که در ادامه به برخی از آنها اشاره می‌کنیم.

خاصیت ۱ : **(خطی بودن)** اگر $y(x) = u(x) + v(x)$ و $x \in \mathbb{N}$؛ آنگاه:

$$\begin{aligned} y'(x) &= y(x+1) - y(x) = [u(x+1) + v(x+1)] - [u(x) + v(x)] \\ &= [u(x+1) - u(x)] + [v(x+1) - v(x)] \\ &= u'(x) + v'(x). \end{aligned}$$

خاصیت ۲ : **(قاعده ضرب)** اگر $y(x) = u(x).v(x)$ برای $x \in \mathbb{N}$ یک تابع گسسته باشد داریم:

$$\begin{aligned} y'(x) &= y(x+1) - y(x) = u(x+1).v(x+1) - u(x).v(x) \\ &= u(x+1).v(x+1) - u(x).v(x+1) \\ &\qquad + u(x).v(x+1) - u(x).v(x) \\ &= v(x+1)\left[u(x+1) - u(x))\right] + u(x)\left[v(x+1) - v(x)\right] \\ &= v(x+1)u'(x) + u(x)v'(x) \\ &= \left[v(x+1) - v(x) + v(x)\right]u'(x) + u(x)v'(x) \\ &= v'(x)u'(x) + v(x)u'(x) + u(x)v'(x). \end{aligned}$$

خاصیت ۳ : اگر $f(x) = c$ تابع گسسته ثابت باشد آنگاه:

$$f'(x) = f(x+1) - f(x) = c - c = 0.$$

خاصیت ۴ : برای تابع گسسته همانی $f(n) = n$ داریم:

$$f'(n) = f(n+1) - f(n) = (n+1) - n = 1.$$

خاصیت ۵ : مشتق تابع گسسته $f(n) = n^2$ عبارت است از:

$$f'(n) = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1.$$

خاصیت ۶ : مشتق تابع گسسته $f(n) = n^k$ عبارت است از:

$$f'(n) = (n+1)^k - n^k = \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k}{r} n^r.$$

خاصیت ۷ : تابع گسسته فاکتوریل (توان ترتیبی) زیر را در نظر بگیرید.

$$f(n) = n^{(k)} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1).$$

مشتق این تابع عبارت است از:

$$\begin{aligned} f'(n) &= (n+1)^{(k)} - n^{(k)} \\ &= (n+1)n(n-1)\cdots(n+1-(k+1)) - n(n-1)\cdots(n-(k-1)) \\ &= [(n+1)n(n-1)\cdots(n-k)] - [n(n-1)\cdots(n-k+1)] \\ &= n(n-1)\cdots(n-k+1)[n+1-(n-k+1)] \\ &= k[n(n-1)\cdots(n-k+1)] = kn^{(k-1)}. \end{aligned}$$

خاصیت ۸ : مشتق تابع گسسته $f(n) = a^n$ عبارت است از:

$$f'(n) = a^{n+1} - a^n = a^n(a-1).$$

در حالت خاص برای $f(n) = 2^n$ داریم: $f'(n) = 2^n$ (با مشتق پیوسته تابع حقیقی e^x مقایسه کنید).

خاصیت ۹ : برای تابع گسسته $f(n) = \sin n$ داریم:

$$f'(n) = \sin(n+1) - \sin n = 2\sin\frac{1}{2}\cos(n+\frac{1}{2}).$$

همچنین مشتق گسسته تابع $f(n) = \cos n$ عبارت است از:

$$f'(n) = \cos(n+1) - \cos n = -2\sin\frac{1}{2}\cos(n+\frac{1}{2}).$$

واضح است که می‌توان مشابه با فرمول‌های مشتق توابع حقیقی، روابط مشابهی را برای مشتق توابع گسسته نیز تولید کرد. ولی به علت سادگی تعریف مشتق گسسته، استفاده مستقیم از تعریف برای پیدا کردن مشتق گسسته مقرون به صرفه است. به عنوان نمونه با توجه به توان فاکتوریل، می‌توان بسط تیلور توابع گسسته را نیز نوشت. داریم:

$$f(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!}(n-n_0)^{(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(n_0)}{k!}(n-n_0)^{(k)}.$$

انتگرال گسسته

همچنان که برای توابع گسسته مشتق را تعریف کردیم، تعریف انتگرال گسسته یک تعمیم طبیعی به نظر می‌رسد. فرض کنید $F'(n) = f(n)$. برای $m_0 \le n \le m$ داریم:

$$\begin{aligned} F(m_0+1) - F(m_0) &= F'(m_0) = f(m_0) \\ F(m_0+2) - F(m_0+1) &= F'(m_0+1) = f(m_0+1) \\ \vdots \quad & \quad \vdots \quad\quad \vdots \\ F(m) - F(m-1) &= F'(m-1) = f(m-1) \end{aligned}$$

با جمع بستن طرفین این روابط داریم:

$$F(m) = F(m_\circ) + \sum_{n=m_\circ}^{m-۱} f(n) \qquad (۱.۵)$$

تعریف ۱ : **انتگرال گسسته** $f(n)$ بر بازه $[m_\circ, m]$ به صورت

$$\int_{m_\circ}^{m} f(n)\triangle n = \sum_{n=m_\circ}^{m-۱} f(n)$$

تعریف می‌شود. با استفاده از (۱.۵) داریم: $\int_{m_\circ}^{m} f(n) = F(m) - F(m_\circ)$. به عبارت دیگر

$$\int_{m_\circ}^{m} f'(n) = f(m) - f(m_\circ)$$

در ادامه تعدادی از خواص انتگرال گسسته را بیان کرده و اثبات آنها را به خواننده واگذار می‌کنیم.

خاصیت ۱۰ : برای توابع گسسته f و g و اعداد ثابت $c, m, m_\circ$ داریم:

۱. (خطی بودن)

$$\int_{m_0}^{m} f(n) + g(n) = \int_{m_0}^{m} f(n) + \int_{m_0}^{m} g(n).$$

۲. $\int_{m_\circ}^{m_\circ} f(n) = \circ$.

۳. $\int_{m_\circ}^{m} c = c(m - m_\circ)$.

۴. $\int_{m_\circ}^{m} cf(n) = c\int_{m_\circ}^{m} f(n)$.

۵. **دستور جزبه‌جز:**

$$\int_{m_\circ}^{m} f'(n)g(n) = f(n)g(n)\Big|_{m_\circ}^{m} - \int_{m_\circ}^{m} f'(n)g(n) - \int_{m_\circ}^{m} f'(n)g'(n)$$

مثال ۳.۵

$$\begin{aligned}\int_{m_\circ}^{m} n &= \sum_{n=m_\circ}^{m-۱} n = m_\circ + (m_\circ + ۱) + \cdots + (m - ۱)\\ &= \frac{m^۲ - m}{۲} - \frac{m_\circ^۲ - m_\circ}{۲}.\end{aligned}$$

مثال ۴.۵

$$\int_{m_\circ}^{m} n^{(k)} \quad = \quad \left.\frac{n^{(k+1)}}{k+1}\right|_{m_\circ}^{m} = \frac{m^k}{k+1} - \frac{m_\circ^{(k)}}{k+1}.$$

مثال ۵.۵

$$\int_{m_\circ}^{m} 2^k \quad = \quad 2^k\big|_{m_\circ}^{m} = 2^m - 2^{m_\circ}.$$

یکی از کاربردهای مشتق گسسته را در مثال بعدی بیان می کنیم.

مثال ۶.۵ چند جمله‌ای $p(n)$ از درجه ۴ را بیابید که در شرایط

$$p(0) = 1, p(1) = 4, p(2) = 57, p(3) = 232, p(4) = 625,$$

صدق کند.

حل : این مساله را می‌توان با درونیابی لاگرانژ نیر حل کرد. در اینجا از مفهوم مشتق گسسته استفاده می‌کنیم. جدولی به صورت زیر ایجاد می‌کنیم.

۶۲۵	۲۳۲	۵۷	۴	۱
	۳۹۳	۱۷۵	۵۳	۳
		۲۱۸	۱۲۲	۵۰
			۹۶	۷۲
				۲۴

در این جدول، سطر دوم مشتقات مرتبه اول تابع در این نقاط است و سطر سوم مشتقات مرتبه دوم و بقیه نیز به همین ترتیب محاسبه می‌شوند. به وضوح مشاهده می شود که مشتق گسسته مرتبه چهارم چندجمله‌ای $p(x)$ عدد ۲۴ است. پس با انتگرال‌گیری گسسته متوالی از ۲۴ داریم:

$$\begin{aligned}
p^{(4)}(n) &= 24\\
p'''(n) &= 24n^{(1)} + 72\\
p''(n) &= 12n^{(2)} + 72n^{(1)} + 50\\
p'(n) &= 4n^{(3)} + 36n^{(2)} + 50n^{(1)} + 3\\
p(n) &= n^{(4)} + 12n^{(3)} + 25n^{(2)} + 3n^{(1)} + 1
\end{aligned}$$

با توجه به تعریف فاکتوریل گسسته نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
p(n) &= n^{(4)} + 12n^{(3)} + 25n^{(2)} + 3n^{(1)} + 1\\
&= n(n-1)(n-2)(n-3) + 12n(n-1)(n-2)\\
&\quad +25n(n-1) + 3n + 1\\
&= (n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n) + 12(n^3 - 3n^2 + 2n)\\
&\quad +25(n^2 - n) + 3n + 1\\
&= n^4 + 6n^3 - 4n + 1.
\end{aligned}$$

$\diamond$

تمرین ۱.۵

۱. دو تابع گسسته $f(n)$ و $g(n)$ داده شده‌اند. نشان دهید اگر به ازای هر n صحیح داشته باشیم $f'(n) = g'(n)$؛ آنگاه $f(n) - g(n)$ یک مقدار ثابت است.

۲. فرض کنید $g(n) = ۱^۲ + ۲^۲ + \cdots + n^۲$. نشان دهید:

$$g(n) = \frac{۱}{۳}(n+۱)^{(۳)} + \frac{۱}{۲}(n+۱)^{(۲)}.$$

۳. رابطه‌ای مشابه با آنچه در مساله قبل بیان شد برای تابع

$$g(n) = ۱^۴ + ۲^۴ + \cdots + n^۴$$

بیابید.

۴. درستی روابط زیر را نشان دهید.

(آ) $n^۲ = n^{(۲)} + n^{(۱)}$.

(ب) $n^۳ = n^{(۳)} + ۳n^{(۲)} + n^{(۱)}$.

(ج) $n^۴ = n^{(۴)} + ۶n^{(۳)} + ۷n^{(۲)} + n^{(۱)}$.

۵. برای هر تابع $f(n)$ بسط تیلور گسسته به صورت زیر را ثابت کنید.

$$f(n) = \sum_{k\geq ۰} \Delta^k f(۰)\binom{n}{k}.$$

۲.۵ روابط بازگشتی

حل بسیاری از مسایل ترکیبیاتی را می‌توان با بررسی دنباله‌هایی مانند $\{a_n\}_{n=۱}^{\infty}$ از اعداد حقیقی تبدیل کرد. با این امید که بتوان رابطه‌ای بین nـامین جملهٔ دنباله، یعنی a_n و جملات قبل یا بعد آن ایجاد کرده و با در نظر گرفتن مقدار تعدادی از اعضای دنباله که معلوم هستند، مقدار a_n را بر حسب n مشخص کرد.

ساختن روابط بازگشتی

در این بخش ساختن روابط بازگشتی را بررسی می‌کنیم. موضوع را با یک مثال آغاز می‌کنیم

مثال ۷.۵ (دنبالهٔ فیبوناتچی) یکی از معروف‌ترین دنباله‌ها؛ دنباله فیبوناتچی است. این دنباله اولین بار در قرن سیزدهم از سوی لئوناردو فیبوناتچی[۱] در ارتباط با مساله رشد جمعیت خرگوش‌ها ارایه شد.

در این دنباله، هر جمله از مجموع دو جمله قبلی به دست می‌آید. معمولاً جمله اول و دوم را $f_۱ = ۱$ و $f_۲ = ۱$ فرض کرده و برای $n \geq 2$ ، رابطهٔ

$$f_n = f_{n-۱} + f_{n-۲},$$

را در نظر می‌گیرند. مفهوم این رابطه چنین است. هر جفت خرگوش در دو ماه به سن بلوغ می‌رسند و بعد از بلوغ؛ هر جفت خرگوش، یک جفت جدید به دنیا می‌آورند و به صورت ایده‌ال فرض بر این

[۱] Leonardo Pisano Fibonacci (1170-1250)

است که هر جفت جدید نیز نر و ماده هستند. f_n تعداد جفت خرگوش‌های موجود در ابتدای ماه n است. در این صورت از اصل جمع استفاده می‌کنیم. $f_{n-۱}$ تعداد جفت خرگوش‌های موجود در ماه قبلی و $f_{n-۲}$ جفت خرگوش‌های به دنیا آمده در ابتدا ماه جاری هستند که تعداد آنها با تعداد جفت خرگوش‌هایی که در دو ماه قبل وجود داشتند برابر است. چند جملهٔ اول این دنباله به صورت $۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ۳۴, ۵۵, ۸۹, \ldots,$ هستند. $\diamondsuit$

توجه داشته باشید که معادله بازگشتی به دست آمده در این مثال را می‌توان چنان مرتب کرد که تمامی اعضای دنباله در سمت چپ قرار گرفته و سمت راست معادله صفر شوند. مثال بعدی نمونه‌ای را نشان می‌دهد که حتی با آرایش فوق‌الذکر، سمت راست معادله حاصل، صفر نیست.

مثال ۸.۵ برای تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله سیاله $x_۱ + x_۲ = n$ که در آن $n \geq ۱$ دنباله‌ای تعریف کرده و رابطه بازگشتی متناظر را به دست آورید.

حل : فرض کنید a_n تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله است. واضح است که $a_۱ = ۲$. زیرا جواب‌های معادله $x_۱ + x_۲ = ۱$

$$x_۱ = ۱, x_۲ = ۰, \qquad x_۱ = ۰, x_۲ = ۱,$$

هستند. به راحتی می‌توان تحقیق کرد که $a_۲ = ۳$ (تحقیق کنید). در حالت کلی، برای $x_۱$ دو حالت مختلف می‌توان در نظر گرفت.

حالت اول: اگر $x_۱ = ۰$ باشد آنگاه $x_2 = n$ و معادله تنها یک جواب دارد.

حالت دوم: اگر $x_۱ \geq ۱$ باشد، تغییر متغیر $y_۱ = x_۱ - ۱$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت $y_1 \geq 0$ و با جایگذاری در معادله اصلی داریم:

$$y_۱ + x_۲ = n - ۱,$$

و تعداد جواب‌های این معادله سیاله $a_{n-۱}$ است.

بنا بر اصل جمع، $a_n = a_{n-۱} + ۱$. با حل این معادله بازگشتی، شکل عمومی برای a_n مشخص می‌شود. $\diamondsuit$

مثال ۹.۵ می‌خواهیم از اعداد ۱ ، ۲۱ ، ۳۲ و ۴۳ برای ساختن اعدادی با ارقام بیشتر استفاده کنیم. یعنی در عدد ساخته شده، بعد از عدد ۲ عدد ۱ ، بعد از عدد ۳ عدد ۲ و بعد از عدد ۴ عدد ۳ ظاهر می‌شود. فرض کنید a_n تعداد اعداد n رقمی ساخته شده با این شرایط است. رابطه بازگشتی مناسبی برای مشخص کردن a_n بر حسب مقادیر قبلی این دنباله بیابید.

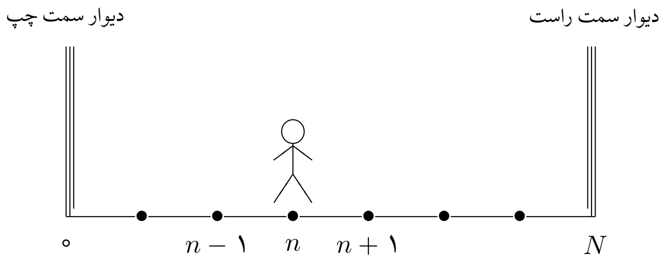
حل : تنها عدد یک رقمی ساخته شده با اعداد داده شده، عدد ۱ است. پس $a_۱ = ۱$. همچنین، تنها چهار عدد دو رقمی با شرایط مذکور ۱۱ ، ۲۱ ، ۳۲ و ۴۳ هستند و بنابراین $a_۲ = ۴$. برای به دست آوردن یک رابطه بازگشتی برای $n \geq ۳$ بر اساس مقدار اولین رقم از سمت چپ، دو حالت را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: اگر اولین رقم سمت چپ ۱ باشد، رقم دوم می‌تواند هر کدام از چهار عدد ۱ ، ۲ ، ۳ و یا ۴ باشد. زیرا در این حالت محدودیتی در انتخاب رقم دوم وجود ندارد. بنابراین، تعداد اعدادی که با ۱ شروع می‌شوند برابر است با تعداد اعداد $n - ۱$ رقمی با شرایط داده شده، یعنی $a_{n-۱}$.

حالت دوم: اگر اولین رقم سمت چپ ۱ نباشد آنگاه یکی از اعداد ۲، ۳ یا ۴ است. ولی در این حالت، وقتی اولین عدد مشخص شد، دومین عدد مشخص است و بنابراین برای رقم دوم یک انتخاب وجود دارد. برای $n-۲$ رقم باقیمانده، $a_{n-۲}$ عدد با شرایط مساله می‌توان ساخت. بنا بر اصل ضرب، تعداد اعداد موجود با شرایط مساله در این حالت، $۳a_{n-۲}$ است.

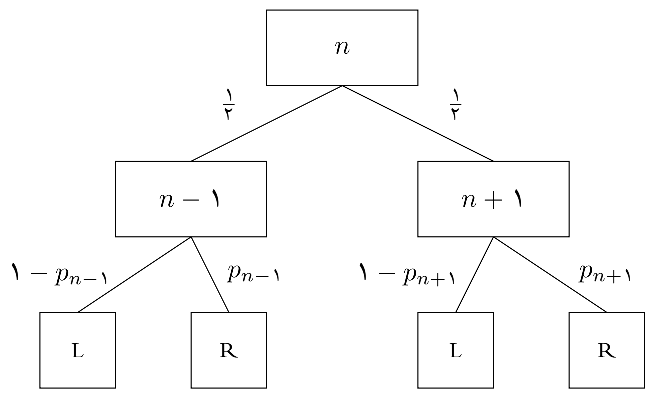
بنا بر اصل جمع، تعداد ارقام n رقمی ($n \geq ۳$) با شرایط داده شده، $a_n = a_{n-۱} + ۳a_{n-۲}$ است. چند جمله آغازین این دنباله $۱, ۴, ۷, ۱۹, ۴۰, ۹۷, \ldots$ هستند. $\diamondsuit$

مثال ۱۰.۵ دو دیوار به فاصله N قدم از یکدیگر قرار دارند. یک آدم آهنی دقیقاً در مکان n قدم از دیوار سمت چپ ایستاده است (شکل بعدی را نگاه کنید).



این آدم آهنی در هر ثانیه یک قدم به راست یا چپ حرکت می‌کند و احتمال حرکت در هر دو جهت مساوی است. برای پیدا کردن احتمال حرکت به سمت دیوار راست، رابطهٔ بازگشتی مناسبی بنویسید.

حل : احتمال حرکت به سمت راست، وقتی آدم آهنی در مکان nام قرار دارد، را با p_n نشان می‌دهیم. خواست این مثال، پیدا کردن یک رابطه بازگشتی بین مقادیر $p_۰, p_۱, \ldots, p_N$ است. واضح است که $p_۰ = ۱$ و $p_N = ۰$. وقتی این آدم آهنی در مکان nــام است و به سمت چپ حرکت کند به مکان $n-۱$ می‌رسد و اگر به سمت راست حرکت کند به مکان $n+۱$ می‌رسد. موضوع بقیه راهپیمایی که به دیوار سمت راست ختم شود را با (R) و ختم شدن به دیوار سمت چپ را با (L) نشان می‌دهیم. شکل بعدی نمودار درختی متناظر را نشان می‌دهد.



در روی شاخه‌هایی که از گره n به گره‌های $n-۱$ و $n+۱$ رسم شده‌اند؛ عدد $\frac{۱}{۲}$ نوشته شده است، زیرا احتمال حرکت به سمت راست یا چپ با هم مساوی است. عدد روی شاخه‌ای که از گره $n-۱$

به گره (R) متصل شده است، p_{n-1} بوده و عدد نوشته شده روی شاخه‌ای که از گره $n+1$ به گره (R) متصل شده است، p_{n+1} است.
احتمال حرکت به سمت دیوار راست در مرحله n را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} p_n &= P(\mathrm{R}) \\ &= P(\text{حرکت به چپ}) \times P(\mathrm{R}|\text{حرکت قبلی به سمت چپ است}) \\ &\quad + P(\text{حرکت به راست}) \times P(\mathrm{R}|\text{حرکت قبلی به سمت راست است}) \\ &= \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{2}p_{n+1}. \end{aligned}$$

پس رابطه بازگشتی به صورت

$$p_{n+1} - 2p_n + p_{n-1} = 0,$$

است. روش حل این معادله بازگشتی در بخش بعدی بیان می‌شود. ♢

در تمامی مثال‌های قبلی، ضرایب جملات در رابطه بازگشتی اعداد ثابت هستند. مثال بعدی نمونه‌ای را نشان می‌دهد که چنین نیست.

مثال ۱۱.۵ برای تعداد بی‌نظمی‌های اعداد $1, 2, \ldots, n$ که در آن $n \geq 1$ است، معادله بازگشتی مناسبی بیابید.

حل : تعداد بی‌نظمی‌ها برای n را با a_n نشان می‌دهیم. بدیهی است که $a_1 = 0$، $a_2 = 1$ و $a_3 = 2$ (چرا). برای $n \geq 3$ دو حالت مختلف را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: اگر در n عدد، اعداد n و r جای خود را با یکدیگر عوض کنند، آنگاه برای انتخاب عدد r، $n-1$ حالت مختلف وجود دارد و برای هر انتخاب r، $n-2$ عدد باقی مانده است که باید بر اساس شرایط بی‌نظمی قرار گیرند و این کار به تعداد a_{n-2} حالت امکان‌پذیر است. بنا بر اصل ضرب، تعداد بی‌نظمی‌های ممکن $(n-1)a_{n-2}$ است.

حالت دوم: فرض کنید عدد n در مکان rام قرار دارد ولی r به مکان n ام منتقل نشده است. در این صورت، باید $n-1$ عدد باقی‌مانده بر اساس خاصیت بی‌نظمی مکان‌یابی شوند که این کار به a_{n-1} روش امکان‌پذیر است. توجه داشته باشید که خود عدد r را می‌توان به $n-1$ روش انتخاب کرد. بنابراین، تعداد بی‌نظمی‌های ممکن در این حالت، بر اساس اصل ضرب، $(n-1)a_{n-1}$ است.

با توجه به دو حالت بیان شده و بر اساس اصل جمع، تعداد کل بی‌نظمی‌های n عدد برابر با

$$a_n = (n-1)a_{n-1} + (n-1)a_{n-2},$$

است. توجه داشته باشید که این معادله، یک معادلهٔ بازگشتی با ضرایب متغیر است. ♢

مثال‌های قبلی، معادله‌های بازگشتی را نشان می‌دهند که تنها به یک اندیس وابسته بودند. در چند مثال‌های بعدی، اعضای دنباله به دو اندیس وابسته هستند.

مثال ۱۲.۵ اگر n و k دو عدد صحیح و مثبت باشند، رابطهٔ بازگشتی مناسبی بیابید که تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله سیالهٔ

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k = n,$$

را مشخص کند.

حل : اعضای دنباله را با $f(n,k)$ نشان می‌دهیم. برای هر $n \geq ۱$ و $k = ۱$، این معادله سیاله فقط یک جواب $x_۱ = n$ را دارد. پس برای هر $n \geq ۱$، $f(n,۱) = ۱$. همچنین برای هر $k \geq ۱$ و $n = ۱$، معادله سیاله به $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k = ۱$ تبدیل می‌شود که این معادله k جواب دارد. در هر جواب، یکی از x_i ها، $۱ \leq i \leq k$ یک بوده و بقیهٔ x_i ها صفر هستند. پس برای هر $k \geq ۱$، $f(۱,k) = k$.

حال فرض کنید n,k در غیر از شرایط فوق الذکر هستند. برای به دست آوردن فرمول عمومی، روی مقدار $x_۱$ بحث می‌کنیم. برای مقدار $x_۱$ دو حالت وجود دارد.

حالت اول: اگر $x_۱ = ۰$ باشد، آنگاه یک مجهول از معادله سیاله کم شده و k به $k - ۱$ تبدیل می‌شود. در این حالت تعداد جواب‌ها $f(n, k-۱)$ است.

حالت دوم: اگر $x_۱ \geq ۱$ باشد، آنگاه با تغییر متغیر $y_۱ = x_۱ - ۱$، متغیر $y_۱$ بزرگ‌تر یا مساوی صفر است و داریم:

$$y_۱ + x_۲ + x_۳ + \cdots + x_k = n - ۱.$$

در این معادله سیاله، مجموع k متغیر صحیح و نامنفی، $n - ۱$ است و بنابراین، تعداد جواب‌ها $f(n-۱, k)$ است.

بنا بر اصل جمع، تعداد کل جواب‌ها با مجموع تعداد جواب‌ها در این دو حالت برابر است و داریم:

$$f(n,k) = f(n,k-۱) + f(n-۱,k).$$

به عنوان نمونه چند عضو اول این دنباله عبارت هستند از:

$$\begin{aligned} f(۲,۲) &= f(۲,۱) + f(۱,۲) = ۱ + ۲ = ۳, \\ f(۲,۳) &= f(۲,۲) + f(۱,۳) = ۳ + ۳ = ۶, \\ f(۳,۳) &= f(۳,۱) + f(۲,۲) = ۱ + ۳ = ۴. \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که اعضای به دست آمده برای $f(n,k)$ برای n,k متقارن نیستند. همانند مثلث پاسکال برای ضرایب دو جمله‌ای، در اینجا نیز می‌توان اعضای دنباله را به صورت یک مثلث آرایش داد (این آرایش چه رابطه‌ای با مثلث پاسکال دارد).

k \ n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	$\cdots$
۱	۱						
۲	۲	۱					
۳	۳	۳	۱				
۴	۴	۶	۴	۱			
۵	۵	۱۰	۱۰	۵	۱		
۶	۶	۱۵	۲۰	۱۵	۶	۱	

لازم به یادآوری است که مثال ۸.۵، حالت خاصی از مثال ۱۲.۵ است. $\diamondsuit$

مثال ۱۳.۵ تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله سیالهٔ

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k = n,$$

را با $f^+(n,k)$ نشان داده و رابطه بازگشتی مناسبی را برای توصیف اعضای این دنباله بیابید.

حل : واضح است که برای $k > n$ این معادله سیاله جوابی ندارد. پس برای $k > n$، $f^+(n,k) = ۰$. همچنین برای $n = k$، تنها یک جواب به صورت $x_i = ۱$ برای هر $۱ \leq i \leq k$ وجود دارد. پس برای هر $n \geq ۱$، $f^+(n,n) = ۱$. در حالت کلی برای $n > k$، بر حسب مقدار $x_۱$ دو حالت وجود دارد:

حالت اول: اگر $x_۱ = ۱$ باشد آنگاه معادله سیاله

$$x_۲ + x_۳ + \cdots + x_k = n - ۱,$$

را داریم که تعداد جواب‌های صحیح و مثبت این معادله $f^+(n-۱, k-۱)$ است.

حالت دوم: اگر $x_۱ > ۱$ باشد آنگاه با تغییر متغیر $x_۱ - ۱ = y_۱ \geq ۱$، معادله سیالهٔ

$$y_۱ + x_۲ + x_۳ \cdots + x_k = n - ۱,$$

به دست می‌آید که تعداد جواب‌های صحیح و مثبت این معادله $f^+(n-۱, k)$ است.

بنا بر اصل جمع، رابطهٔ

$$f^+(n,k) = f^+(n-۱, k-۱) + f^+(n-۱, k),$$

برقرار است. در مقایسه با فرمول ترکیب، احتمالاً رابطه

$$f^+(n,k) = \binom{n}{k},$$

برقرار است. آیا این ادعا صحیح است؟ ◇

در دو مثال قبلی، رابطه‌های بازگشتی را دیدیم که به بیش از یک اندیس وابسته هستند. با این حال هر دوی آنها خصوصیتی مانند رابطه بازگشتی فیبوناتچی دارند، یعنی ضریب هر جمله در رابطه بازگشتی عددی ثابت است. دو مثال بعدی حالت عمومی‌تری را نشان می‌دهند.

مثال ۱۴.۵ اعداد صحیح نامنفی r و n با شرط $r \geq n \geq ۰$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $s(r,n)$ تعداد حالت‌های مختلف قرار گرفتن r شی متمایز در اطراف n دایره است که در هر دایره، حداقل یک شیء قرار دارد. این اعداد را **اعداد استرلینگ**[۲] **نوع اول** می‌نامند. نشان دهید این اعداد در رابطه بازگشتی

$$s(r,n) = s(r-۱, n-۱) + (r-۱)s(r-۱, n),$$

صدق می‌کنند.

[۲] James Stirling (1692 – 1770)

حل : برای سادگی، r شی متمایز را از ۱ تا r نام‌گذاری می‌کنیم. عدد ۱ را در نظر بگیرید. در هر ترتیب، ۱ یا تنها عدد قرار گرفته در یک دایره است و یا در کنار اعداد دیگر در یک دایره قرار دارد. در حالت اول، تعداد $s(r-۱,n-۱)$ ترتیب متمایز وجود دارد. در حالت دوم، ابتدا اعداد $۲,۳,\ldots,r$ (تعداد این اعداد $r-۱$ است) به تعداد $S(r-۱,n)$ حالت مختلف در اطراف n دایره قرار می‌گیرند. سپس عدد ۱ در یکی از $r-۱$ مکان متمایز (سمت راست) متناظر با این $r-۱$ عدد قرار می‌گیرد. بنا بر اصل ضرب، تعداد حالت‌های مختلف این ترتیب، $(r-۱)s(r-۱,n)$ است. جواب مساله با استفاده از اصل جمع تولید می‌شود. $\diamondsuit$

مثال ۱۵.۵ اعداد r و n صحیح و نامنفی هستند. **اعداد استرلینگ نوع دوم** که با $S(r,n)$ نشان داده می‌شوند عبارت هستند از روش‌های مختلف توزیع r شی مختلف در n جعبه متمایز، طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد. نشان دهید برای هر $r\geq n$، داریم:

$$S(r,n)=S(r-۱,n-۱)+nS(r-۱,n),$$

حل : مانند مثال قبل، اشیا را با اعداد ۱ تا r نشان می‌دهیم. در هر توزیعی، یا عدد ۱ تنها عدد موجود در یک جعبه است و یا همراه با اعداد دیگر در جعبه‌ای قرار دارد. در حالت اول، تعداد روش‌های مختلف $S(r-۱,n-۱)$ است. در حالت دوم، ابتدا $r-۱$ عدد باقیمانده در n جعبه قرار می‌گیرند؛ که این کار به $S(r-۱,n)$ روش امکان‌پذیر است. سپس عدد ۱ به n حالت در یکی از جعبه‌ها قرار داده می‌شود. در حالت دوم، بنا بر اصل ضرب، تعداد روش‌های مختلف قرار دادن اعداد، $nS(r-۱,n)$ است. نتیجه نهایی با به کار بردن اصل جمع برای دو حالت حاصل می‌شود. $\diamondsuit$

با توجه به مثال‌های مطرح شده، دسته‌بندی‌های مختلفی برای معادله‌های بازگشتی وجود دارد. فرض کنید $a_۱,a_۲,a_۳,\ldots$ اعضای یک دنباله بوده و با رابطه

$$a_n=c_۱a_{n-۱}+c_۲a_{n-۲}+\cdots+c_ka_{n-k}, \qquad (۲.۵)$$

به هم مربوط می‌شوند که در آن c_i، $۱\leq i\leq k$ اعداد حقیقی هستند. رابطهٔ (۲.۵) را می‌توان به صورت

$$a_n-c_۱a_{n-۱}-c_۲a_{n-۲}-\cdots-c_ka_{n-k}=۰, \qquad (۳.۵)$$

نیز نوشت. معادله‌ای به صورت (۲.۵) یا (۳.۵) را **معادله بازگشتی خطی همگن** از مرتبه k گویند. اعداد حقیقی c_i، $۱\leq i\leq k$ را **ضرایب** معادله می‌نامند.

فرض کنید اعضای این دنباله با رابطه

$$a_n=c_۱a_{n-۱}+c_۲a_{n-۲}+\cdots+c_ka_{n-k}+f_n, \qquad (۴.۵)$$

به هم مربوط می‌شوند که در آن مجدداً c_i، $۱\leq i\leq k$ اعداد حقیقی هستند و $\{f_n\}$ دنباله‌ای از اعداد است که در شرایط خاصی صدق می‌کند. رابطهٔ (۴.۵) را می‌توان به صورت

$$a_n-c_۱a_{n-۱}-c_۲a_{n-۲}-\cdots-c_ka_{n-k}=f_n, \qquad (۵.۵)$$

نیز نوشت. معادله‌ای به صورت (۴.۵) یا (۵.۵) را معادله بازگشتی خطی ناهمگن از مرتبه k گویند.

مفهوم خطی بودن در این رابطه‌های بازگشتی این است که اعضای دنباله در رابطه‌ها تنها از درجه اول ظاهر شده و همچنین، هیچ دو عضو (یا بیشتر) دنباله بر هم ضرب یا تقسیم نشده‌اند. علاوه بر این، مفهوم مرتبه k این است که برای مشخص کردن یک عضو دنباله، به دانستن k عضو متوالی قبلی

دنباله نیازمندیم. در هر دو رابطه خطی فوق، ضرایب جملات دنباله اعداد حقیقی و ثابت هستند. چنین معادله‌هایی را معادله خطی با **ضرایب ثابت** می‌نامند.

آنچه در مثال ۷.۵ دیدیم یک معادله بازگشتی خطی همگن از مرتبه دو است. مثال ۸.۵ نمونه‌ای از یک معادله بازگشتی خطی ناهمگن از مرتبه اول است. مثال‌های ۱۲.۵ و ۱۳.۵ نمونه‌هایی از معادله بازگشتی خطی با ضرایب ثابت، ولی با بیش از یک اندیس هستند. مثال‌های ۹.۵ و ۱۰.۵ نیز نمونه‌هایی از معادله‌های بازگشتی خطی همگن از مرتبه دو هستند با این تفاوت که در معادله مشخص شده در مثال ۹.۵، مقدارهای چند عضو اول دنباله معلوم است در حالی که برای معادله مشخص شده در مثال ۱۰.۵، اعضای دنباله متناهی! بوده و دو مقدار اول و آخر دنباله معلوم است. با توجه به این دو مثال، تقسیم‌بندی دیگری نیز برای معادله‌های بازگشتی وجود دارد. معادله بازگشتی مشخص شده در مثال ۹.۵ را **مساله مقدار اولیه** و معادله به دست آمده در مثال ۱۰.۵ را **مساله مقدار مرزی** می‌نامند. مثال‌های ۱۱.۵، ۱۴.۵ و ۱۵.۵ نمونه‌هایی از رابطه‌های بازگشتی خطی با ضرایب غیرثابت هستند. توجه داشته باشید که خطی بودن یک معادله بازگشتی الزامی نیست. مثال بعدی نمونه‌ای از یک معادله بازگشتی غیرخطی را نشان می‌دهد.

مثال ۱۶.۵ فرض کنید u_n تعداد درخت‌های دودیی با n راس است. معادله بازگشتی مناسبی بنویسید که رابطه بین تعداد اعضای این دنباله را توصیف کند.

حل : توجه کنید که حل این مساله بدون مشخص کردن دقیق این که دو درخت در چه حالتی یکریخت هستند، ساده نیست. برای سادگی کار، فرض می‌کنیم که درخت‌ها روی صفحه قرار دارند و به عنوان نمونه، دو درخت

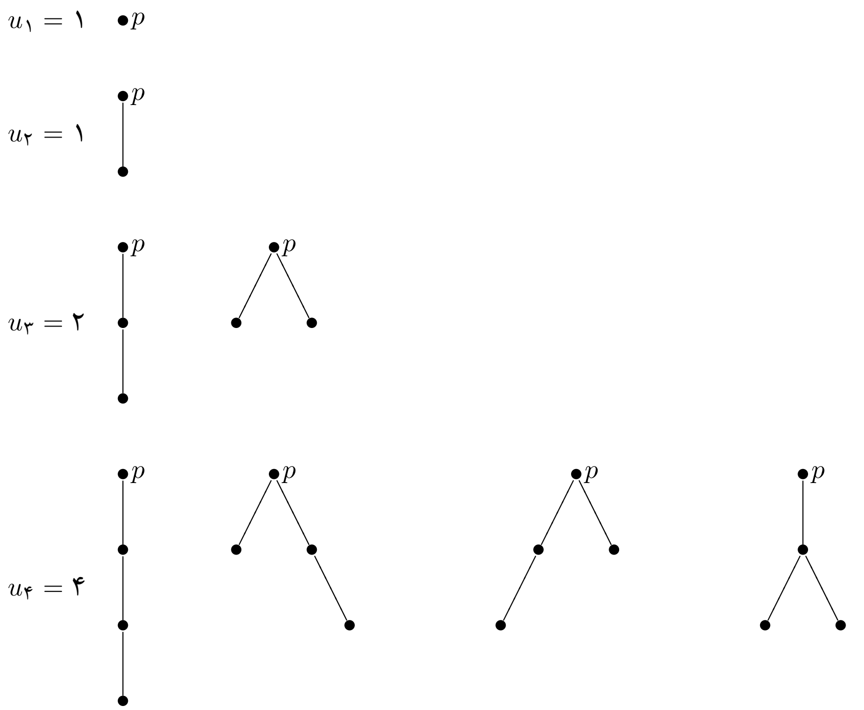
متمایز فرض می‌شوند. اگر این دو درخت یکریخت در نظر گرفته شوند حل مساله مشکل‌تر شده و به اطلاعات پیشرفته‌ای از نظریه گراف و به خصوص قضیهٔ پولیا[۳] نیاز خواهیم داشت[۴].

برای $n = ۱, ۲, ۳, ۴$، درخت‌های دودویی ریشه‌دار در شکل بعدی رسم شده اند. در این

[۳] George Pólya (1887-1985)

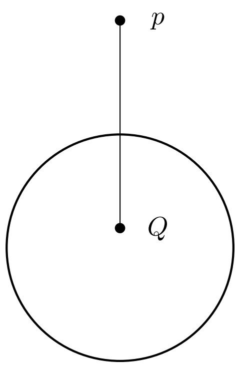
[۴] قضیه شمارش پولیا، که قضیه ردفیلد_ پولیا نیز نامیده می شود، قضیه‌ای در ترکیبیات است که نتیجه و همچنین تعمیمی از لم «برونساید» در باره تعداد اوربیت‌ها در یک عمل گروه روی یک مجموعه است. این قضیه اولین بار توسط جان هوارد ردفیلد John Howard Redfield در سال ۱۹۲۷ منتشر شد. در سال ۱۹۳۷، دوباره به طور مستقل توسط جرج پولیا کشف شد. این نتایج در مسایل مربوط به شمارش، مخصوصا در شمارش ترکیبات شیمیایی به وفور استفاده شده‌اند.

درخت‌ها، ریشه با نام p شناخته می‌شود.



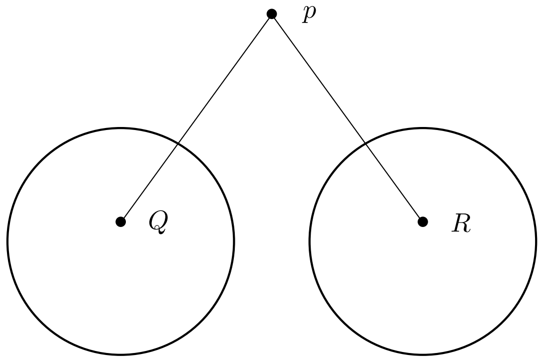
برای محاسبه u_n برای $n \geq ۳$ دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول: ممکن است درجه ریشه درخت دودویی با n راس، یک باشد. تعداد درخت‌هایی از این نوع را با s_n نشان می دهیم. ابتدا رابطه بازگشتی برای محاسبه $s_{n+۱}$ را پیدا می‌کنیم. درخت‌هایی که با $s_{n+۱}$ شمارش می‌شوند به صورت شکل بعدی است که در داخل دایره یک درخت ریشه‌دار دودویی با n راس با ریشه Q قرار دارد.



واضح است که در داخل دایره، تعداد u_n درخت دودویی ریشه‌دار وجود دارد. پس، $s_{n+۱} = u_n$.

حالت دوم: ممکن است درجه ریشه درخت دودویی با n راس، دو باشد. تعداد درخت‌هایی از این نوع را با d_n نشان می‌دهیم. درخت‌هایی که برای محاسبه d_{n+1} در نظر گرفته می‌شوند به صورت شکل بعدی هستند که در داخل دایره سمت چپ یک درخت ریشه‌دار دودویی با q راس و ریشه Q قرار دارد و در داخل دایره سمت راست یک درخت ریشه‌دار دودویی با r راس و ریشه R قرار دارد و $q+r=n$ که در آن $r, q \geq 1$.



برای انتخاب زیردرخت سمت چپ، u_q حالت مختلف وجود دارد و به همین ترتیب، برای انتخاب زیردرخت سمت راست، u_r حالت مختلف موجود است. با توجه به اصل ضرب، تعداد انتخاب‌ها برای هر r, q برابر با $u_q u_r$ است و بنابراین، بر طبق اصل جمع رابطه

$$d_{n+1} = u_1 u_{n-1} + u_2 u_{n-2} + \cdots + u_{n-1} u_n = \sum_{r+q=n} u_r u_q,$$

برقرار است.

با توجه به اصل جمع، واضح است که رابطه

$$u_{n+1} = s_{n+1} + d_{n+1} = u_n + \sum_{r+q=n} u_r u_q,$$

برقرار است که به وضوح یک معادله بازگشتی غیرخطی است و برای محاسبه u_n دانستن مقدار تمامی اعضای قبلی دنباله لازم است. $\diamondsuit$

تمرین ۲.۵

۱. با استفاده از مثال ۱۱.۵ تمامی بی‌نظمی‌های اعداد $1, 2, 3, 4$ را بنویسید.

۲. در اول فروردین ماه یک جفت خرگوش (نر و ماده) داریم و می‌دانیم که هر جفت خرگوش بعد از دو ماه بالغ شده و دو جفت نوزاد جدید (نر و ماده) به دنیا می‌آورند. اگر تعداد جفت خرگوش‌ها را در ابتدای ماه nام با f_n نشان دهیم، درستی رابطه

$$f_n = f_{n-1} + 2f_{n-2},$$

را برای $n \geq 3$ توصیف کنید که در آن $f_1 = f_2 = 1$.

۳. در تمرین ۲، اگر دوره دو ماهه بلوغ به دوره سه ماهه تبدیل شود، معادله بازگشتی چه تغییری می‌کند؟

۴. در تمرین ۲، اگر به جای دو جفت خرگوش در هر ماه، سه جفت خرگوش به دنیا بیایند، معادله بازگشتی چه تغییری می‌کند؟

۵. در تمرین ۲، اگر به جای دو جفت خرگوش در هر ماه، یک جفت خرگوش در هر دو ماه به دنیا بیاید، معادله بازگشتی چه تغییری می‌کند؟

۶. در تمرین ۲، اگر عمر هر جفت خرگوش تنها چهار ماه باشد، معادله بازگشتی چه تغییری می‌کند؟

۷. دنباله فیبوناتچی $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ با $f_1 = 1$ و $f_2 = 1$ را برای $m = 2, 3, \ldots$ در نظر بگیرید. با استقرا ثابت کنید: $f_{n+m} = f_{n-1}f_m + f_n f_{m+1}$.

۸. دنباله فیبوناتچی را در نظر بگیرید. با استقرا روی n نشان دهید برای هر $n \geq 1$:

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1.$$

۹. فرض کنید a_n تعداد دنباله‌های n رقمی را که با ارقام صفر و یک تشکیل می‌شوند، نشان دهد به طوری که دو رقم مجاور هم صفر نباشند. نشان دهید $a_1 = 2$ و $a_2 = 3$ و برای $n \geq 3$ رابطه بازگشتی $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ برقرار است. این دنباله چه رابطه‌ای با دنباله فیبوناتچی دارد؟

۱۰. فرض کنید b_n نشان دهنده تعداد دنباله‌های n رقمی است که با ارقام $1-, 1, 0$ ساخته شده‌اند به طوری که دو رقم ۱ و ۱− مجاور هم نیستند. مقادیر b_1 و b_2 را پیدا کرده و نشان دهید برای $n \geq 3$ رابطه بازگشتی $b_n = 2b_{n-1} + b_{n-2}$ برقرار است.

۱۱. یک پرچم با استفاده از n نوار رنگی افقی ساخته می‌شود و این نوارها می‌توانند به یکی از چهار رنگ قرمز، آبی، سبز یا زرد باشند. معادله‌های بازگشتی را در هر یک از حالت‌های زیر مشخص کنید.

(آ) محدودیتی در انتخاب رنگ‌ها وجود ندارد.

(ب) دو نوار مجاور همرنگ نیستند.

(ج) علاوه بر نوارهای مجاور، دو نوار بالایی و پایینی نیز همرنگ نیستند.

۱۲. برای $n \geq 1$، دترمینان ماتریس $n \times n$ را به صورت

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & 1+a^2 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1+a^2 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a^2+1 \end{vmatrix},$$

تعریف می‌کنیم. این ماتریس سه قطری بوده و روی قطر اصلی $۱ + a^۲$ قرار داشته و روی دو قطر فرعی a قرار می‌گیرد. مقادیر $D_۱$ و $D_۲$ را پیدا کرده و نشان دهید برای هر $n \geq ۳$ رابطه بازگشتی $D_n = (۱ + a^۲)D_{n-۱} - a^۲ D_{n-۲}$ برقرار است.

۱۳. فرض کنید a_n نشان دهنده تعداد حالت‌های مختلف پر کردن یک آرایه $n \times ۲$ با دومینوهایی به ابعاد ۲×۱ است. نشان دهید $a_۱ = ۱$ و $a_۲ = ۲$ و برای هر $n \geq ۳$ رابطه بازگشتی $a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲}$ برقرار است.

۱۴. فرض کنید a_n نشان دهنده تعداد حالت‌های مختلف پر کردن یک آرایه $۲n \times ۳$ با دومینوهایی به ابعاد ۲×۱ است. فرض کنید در آرایه $۲n \times ۳$، بُعد ۳ به طور عمودی قرار دارد. x_n و y_n به ترتیب نشان دهنده تعداد حالت‌های مختلف قرار گرفتن دومینوها در این آرایه است که در سمت راست، ۳ دومینو قرار گرفته و یا کمتر از ۳ دومینو قرار دارد. واضح است که $a_n = x_n + y_n$. نشان دهید:

$$\begin{aligned} x_{n+۱} &= x_n + y_n \\ y_{n+۱} &= ۲x_n + ۳y_n, \end{aligned}$$

و از آن نتیجه بگیرید $a_{n+۲} = ۴a_{n+۱} - a_n$.

۱۵. با استقرا ثابت کنید در دنباله فیبوناتچی:

(آ) $f_{n-۱}f_{n+۱} = f_n^۲ + (-۱)^n$.

(ب) $\sum_{i=۰}^{n} f_i^۲ = f_n f_{n+۱}$

۱۶. با استفاده از حرف رشته‌ای a، bcd، cde، dcd و edc کلمات n حرفی ساخته می‌شود. تعداد کلمات n حرفی ساخته شده به این طریق را با x_n نشان دهید.

(آ) $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ را بیابید.

(ب) رابطه بازگشتی متناظر را برای دنباله x_n بنویسید.

۱۷. تابع آکرمان [۵] برای هر زوج عدد طبیعی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} A(۰, n) &= n + ۱ \\ A(m, ۰) &= A(m - ۱, ۱), \quad m > ۰ \\ A(m - ۱, n) &= A(m - ۱, A(m, n - ۱)), \quad m, n > ۰. \end{aligned}$$

مقدار $A(۴,۲)$ و $A(۳,۴)$ را محاسبه کنید.

۱۸. دترمینان D_n برای ماتریس $n \times n$، $n \geq ۱$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D_n = \begin{vmatrix} b & b & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ b & b & b & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & b & b & \cdots & ۰ & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & b & b \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & b \end{vmatrix},$$

[5] Wilhelm Friedrich Ackermann (1896-1962)

(ماتریس سه قطری با مولفه‌های b). مقدار D_1 و D_2 را پیدا کنید و نشان دهید

$$D_n = bD_{n-1} - b^2 D_{n-2}.$$

۱۹. نوعی حلزون رشدی به نسبت هر سال سه برابر رشد سال قبل دارد و در ابتدای یک سال، ۳۰۰ حلزون موجود بوده و در ابتدای سال بعد، ۳۵۰۰ حلزون مشاهده شد. ۲۰۰ حلزون برای تکثیر به محل دیگر منتقل شد. این عمل در پایان هر سال تکرار می‌شود. اگر a_n نشان دهنده تعداد حلزون‌ها بعد از n سال باشد؛ معادله بازگشتی متناظر برای a_n را بنویسید.

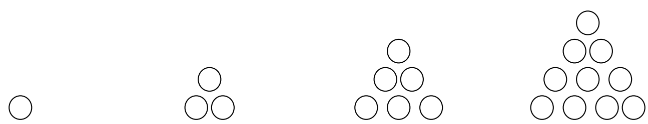
۲۰. نوعی ماهی زنده‌زا بعد از ۷۵ روز بالغ شده و بعد از هر ۲۵ روز، ۳۰ بچه ماهی به دنیا می‌آورد. در هر دوره ۱۰ درصد از ماهی‌های تازه به دنیا آمده از بین می‌روند. اگر عمر هر ماهی ۳۰۰ روز باشد و در ابتدای کار تنها دو ماهی (نر و ماده) داشته باشیم، در پایان یک دوره ۶۰۰ روزه چند قطعه ماهی وجود خواهد داشت؟ برای این کار، تعداد ماهی‌ها در پایان دوره ۲۵ روزه n ام را با a_n نشان داده و معادله تفاضلی متناظر را بنویسید.

۲۱. برای $n \geq 1$، nامین عدد مثلثی T_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

اگر $S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$ باشد، یک رابطه بازگشتی برای محاسبه S_n بنویسید.

۲۲. در یک آزمایشگاه شیمی، یک ساختار کریستالی با ۱۰ میلیون اتم مثلثی ساخته شده است. ردیف اول یک اتم، ردیف دوم سه اتم ، دریف سوم ۶ اتم و به طور کلی ردیف nام $T_n = n + \cdots + 2 + 1$ اتم دارد (تمرین قبلی را نگاه کنید).



$n = 1$ $\qquad$ $n = 2$ $\qquad$ $n = 3$ $\qquad$ $n = 4$

در هر یک از این ساختارهای کریستالی چند اتم موجود است؟ رابطه بازگشتی برای تعداد اتم‌های کریستال‌ها را بنویسید.

۲۳. دنباله زیر را در نظر بگیرید که در آن هر جمله میانگین دو جمله قبلی است:

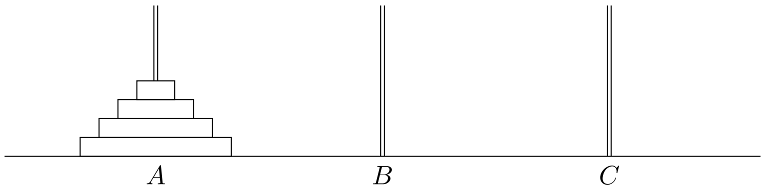
$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{11}{16}, \ldots$$

اگر جمله nام را با a_n نشان دهیم، رابطه بازگشتی برای a_n را بنویسید.

۲۴. مثال ۱۰.۵ را مجدداً در نظر بگیرید. اگر احتمال حرکت به سمت چپ $\frac{1}{3}$ و احتمال حرکت به سمت راست $\frac{2}{3}$ باشد، آنگاه رابطه بازگشتی متناظر را بنویسید.

۲۵. (برج هانوی) فرض کنید n قرص به شعاع‌های ۱ ، ۲ ، . . . و n داده شده‌اند و طوری روی هم چیده شده‌اند که قرص‌های بزرگ‌تر، پایین‌تر از قرص‌های کوچک‌تر قرار دارند. از دو میله خالی

برای انتقال قرص‌ها به یکی از دو میله خالی استفاده می‌کنیم و در هر جابجایی، شرط فوق را مراعات می‌کنیم. حداقل تعداد حرکات قرص‌ها از میله‌ای به میله دیگر را با a_n نمایش می‌دهیم. واضح است که $a_۱ = ۱$ و $a_۲ = ۳$. رابطه بازگشتی مناسبی برای دنباله a_n بنویسید (شکل بعدی را به عنوان نمونه نگاه کنید. در این شکل سه میله با چهار قرص مشاهد می‌شود).



۲۶. در شرایط تمرین ۲۵، فرض کنید انتقال قرص‌ها به ترتیب زیر مجاز است؛ از میله A به میله B، از میله B به میله C و از میله C به میله A. اگر حداقل تعداد انتقال قرص‌ها را با a_n نشان دهیم، معادله بازگشتی متناظر را به دست آورید.

۲۷. در برج هانوی، فرض کنید $۲n$ قرص با n شعاع مختلف داریم و از هر شعاع، دقیقاً دو قرص وجود دارد و قرص‌های با شعاع یکسان، متمایز نیستند. اگر حداقل تعداد حرکات به یکی از میله‌های ohgd را با a_n نشان دهیم، رابطه بازگشتی برای a_n را بنویسید.

۲۸. در تمرین قبلی، اگر هدف، انتقال n قرص به میله B و n قرص دیگر به میله C با شرایط برج هانوی باشد و a_n نشان دهنده حداقل تعداد حرکت‌ها باشد، رابطه بازگشتی مناسب برای a_n را بنویسید.

۲۹. در تمرین ۲۵، اگر چهار میله داشته باشیم و هدف مساله، انتقال قرص‌ها از میله A به میله چهارم با استفاده از میله‌های خالی باشد، جواب مساله چیست؟ بقیه تمرین‌ها را نیز با این شرط حل کنید.

۳۰. (**تعمیم برج هانوی**) اگر $۲n$ قرص به شعاع‌های ۱، ۲،... و $۲n$ داشته باشیم و قرص‌هایی با شعاع فرد روی میله A قرار دارند و قرص‌هایی با شعاع زوج روی میله B. حداقل با چند حرکت می‌توان همه قرص‌ها را روی میله C منتقل کرد به طوری که در هر مرحله و در پایان کار، هیچ قرص کوچک‌تر، زیر قرص بزرگ‌تر قرار نگیرد. معادله بازگشتی متناظر را بنویسید.

۳۱. معادله تفاضلی خطی $x_n = nx_{n-۱} + ۱$ با $x_۰ = ۱$ را در نظر بگیرید. پنج جمله اول آن را بیابید. به نظر شما جواب عمومی x_n چیست؟ چه دلیلی برای ادعای خود دارید.

۳۲. رابطه بازگشتی برای تعداد قطرهای یک n ضلعی محدب را به دست آورید.

۳۳. با شرط آن که در کنار هر میز حداقل یک نفر بنشیند؛ به چند روش می‌توان ۶ نفر را

(آ) دور دو میز نشاند.

(ب) دور سه میز نشاند.

(راهنمایی_ از اعداد استرلینگ نوع اول استفاده کنید.)

۳۴. برای اعداد استرلینگ نوع اول و نوع دوم نشان دهید:

(آ) $s(\circ,\circ) = \circ$ و $s(r,\circ) = s(\circ,n) = \circ$ که در آن r و n اعداد صحیح مثبت هستند.

(ب) برای هر $r \geq \circ$، $s(r,r) = ۱$

(ج) برای هر $r \geq ۲$، $s(r,r-۱) = \binom{r}{۲}$.

(د) برای هر $r \geq ۲$، $s(r,۱) = (r-۱)!$.

(ه) برای هر $r \geq ۲$، $S(r,۲) = ۲^{r-۱} - ۱$.

(و) $S(r,۳) = \frac{۱}{۲}(۳^{r-۱}+۱) - ۲^{r-۱}$.

(ز) $S(r,r-۲) = \binom{r}{۳} + ۳\binom{r}{۴}$.

۳۵. دنباله‌ای از اعداد مثبت a_n در رابطه $a_n = ۲\sqrt{a_{n-۱}}$ با شرط اولیه $a_\circ = ۲۵$ صدق می‌کند. نشان دهد $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = ۴$.

۳۶. هنگام بالا رفتن از یک پلکانی، هر گام معمولی شامل حداقل یک و حداکثر دو پله است. اگر $f(n)$ تعداد روش‌های بالا رفتن از پلکانی با n پله باشد، رابطه بازگشتی برای این دنباله را بنویسد.

۳.۵ حل معادلات تفاضلی

همان طور که در بخش قبلی ملاحظه شد، ارتباط نزدیکی بین معادلات تفاضلی و معادلات دیفرانسیل وجود دارد. روش‌هایی که در این بخش برای حل معادله تفاضلی ارائه می‌شود، همانند روش‌های حل معادلات دیفرانسیل است.

فرض کنید معادله تفاضلی

$$x_n - x_{n-۱} - ۲x_{n-۲} = \circ, \quad n \geq ۳, \tag{۶.۵}$$

داده شده است. نظیر جستجوی جوابی مانند $e^{\alpha x}$ برای معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرایب ثابت، برای به دست آوردن یک جواب عمومی برای معادله تفاضلی (۶.۵) جوابی را به صورت $x_n = \lambda^n$ جستجو می‌کنیم که λ مقدار ثابت ناصفر است. با جایگذاری مقدار x_n در معادله (۶.۵) داریم:

$$\begin{aligned} \lambda^n - \lambda^{n-۱} - ۲\lambda^{n-۲} &= \circ \\ \lambda^{n-۲}(\lambda^۲ - \lambda - ۲) &= \circ \\ \lambda^۲ - \lambda - ۲ &= \circ. \end{aligned} \tag{۷.۵}$$

معادله (۷.۵) را **معادله مشخصه** برای معادله تفاضلی (۶.۵) می‌گویند و چندجمله‌ای $\lambda^۲ - \lambda - ۲$ را چندجمله‌ای مشخصه می‌نامند. توجه داشته باشید که ضرایب این چندجمله‌ای دقیقا همان ضرایب معادله تفاضلی هستند.

$$\begin{aligned} \text{معادله تفاضلی}: \quad x_n - x_{n-۱} - ۲x_{n-۲} &= \circ \\ \text{معادله مشخصه}: \quad \lambda^۲ - \lambda - ۲ &= \circ \end{aligned}$$

در حالت کلی، برای معادله تفاضلی همگن از مرتبه k داریم:

$$\begin{aligned} \text{معادله تفاضلی :} \quad x_n - a_۱ x_{n-۱} - a_۲ x_{n-۲} - \cdots - a_k x_{n-k} &= ۰ \\ \text{معادله مشخصه :} \quad \lambda^k - a_۱ \lambda^{k-۱} - a_۲ \lambda^{k-۲} - \cdots - a_k &= ۰ \end{aligned}$$

معادله (۷.۵) دو جواب $\lambda = -۱$ و $\lambda = ۲$ دارد و لذا $x_n = ۲^n$ و $x_n = (-۱)^n$ هر دو جواب‌های معادله تفاضلی (۶.۵) هستند. این نتیجه را در قاعده بعدی خلاصه می‌کنیم.

حل معادله تفاضلی:

اگر λ ریشه‌ای دلخواه از معادله مشخصه متناظر با معادله تفاضلی همگن باشد، آنگاه $x_n = \lambda^n$ جواب معادله تفاضلی همگن متناظر است.

چون ممکن است یک معادله مشخصه بیش از یک ریشه داشته باشد، معادله تفاضلی همگن نیز بیش از یک جواب خواهد داشت. برای این منظور قاعده بعدی را داریم. اثبات درستی این قاعده دقیقاً مشابه روش حل معادله دیفرانسیل است. وقتی چند جواب خاص مستقل خطی موجود هستند، هر ترکیب خطی از این جواب‌ها نیز جواب معادله دیفرانسیل است. نوشتن استدلالی مشابه برای این قاعده به عهده دانشجو است.

حل معادله تفاضلی- خاصیت خطی بودن جواب‌ها:

اگر x_n و y_n دو جواب مستقل خطی معادله تفاضلی همگن باشند، آنگاه به ازای مقادیر ثابت $c_۱$ و $c_۲$، رابطه

$$z_n = c_۱ x_n + c_۲ y_n$$

نیز جواب معادله تفاضلی همگن است.

بنابراین، معادله تفاضلی همگن (۶.۵) جوابی به صورت

$$x_n = c_۱ ۲^n + c_۲ (-۱)^n, \tag{۸.۵}$$

دارد. این جواب را **جواب عمومی** معادله تفاضلی همگن می‌نامند. واضح است که در معادله بازگشتی با هر انتخاب $x_۱$ و $x_۲$ ، دنباله‌های متمایزی تولید می‌شوند. به زبان ریاضی، مقادیر خاص $x_۱$ و $x_۲$ را **شرایط اولیه** برای معادله بازگشتی می‌گویند.

برای به دست آوردن جوابی که در شرایط اولیه داده شده صدق کند؛ لازم است $c_۱$ و $c_۲$ به طور مناسبی اختیار شوند. به عنوان مثال، برای $x_۱ = ۱$ و $x_۲ = ۳$، باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} ۲c_۱ - c_۲ &= ۱ \\ ۴c_۱ + c_۲ &= ۳, \end{aligned}$$

که با حل این دستگاه معادلات داریم: $c_۱ = \frac{۲}{۳}$ و $c_۲ = \frac{۱}{۳}$ و بعد از جایگذاری مقادیر $c_۱$ و $c_۲$ در جواب عمومی (۸.۵) داریم:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{۲}{۳} ۲^n + \frac{۱}{۳} (-۱)^n \\ &= \frac{۱}{۳} (۲^{n+۱} + (-۱)^n). \end{aligned}$$

حال برای مقادیر مختلف n، می‌توان بدون دانستن مقادیر قبلی، مقدار x_n را پیدا کرد. به عنوان مثال برای $n = ۲۰$ داریم:

$$x_{۲۰} = \frac{۱}{۳}(۲^{۲۱} + (-۱)^{۲۰}) = ۶۹۹۰۵۱.$$

نتیجه ۱۵ *هر عددی به صورت* $۲^{n+۱} + (-۱)^n$ *بر ۳ قابل قسمت است (چرا؟).*

مثال ۱۷.۵ معادله تفاضلی فیبوناتچی زیر را حل کنید.

$$f_۰ = ۰, \quad f_۱ = ۱, \quad f_n - f_{n-۱} - f_{n-۲} = ۰, \quad n \geq ۲.$$

حل : معادله مشخصه متناظر عبارت است از:

$$\lambda^۲ - \lambda - ۱ = ۰.$$

این معادله دو ریشه دارد:

$$\lambda_۱ = \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}, \quad \lambda_۲ = \frac{۱ - \sqrt{۵}}{۲}.$$

پس جواب عمومی معادله تفاضلی فیبوناتچی به صورت زیر است:

$$f_n = c_۱ \left(\frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}\right)^n + c_۲ \left(\frac{۱ - \sqrt{۵}}{۲}\right)^n.$$

با استفاده از شرایط اولیه، دستگاه معادلات زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} c_۱ + c_۲ &= ۰ \\ c_۱ \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲} + c_۲ \frac{۱ - \sqrt{۵}}{۲} &= ۱. \end{aligned}$$

پس

$$c_۱ = -\frac{۱}{\sqrt{۵}}, \quad c_۲ = \frac{۱}{\sqrt{۵}}.$$

بنابراین، n امین عضو دنباله فیبوناتچی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$f_n = \frac{۱}{\sqrt{۵}} \left[\left(\frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}\right)^n - \left(\frac{۱ - \sqrt{۵}}{۲}\right)^n\right].$$

انجام محاسبات روی این رابطه برای محاسبه nامین عضو دنباله فیبوناتچی، برای nهای داده شده واقعاً کاری بسیار سخت است، ولی می‌توان آن را ساده‌تر کرد. با استفاده از قضیه دوجمله‌ای داریم:

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{۱}{\sqrt{۵}} \frac{۱}{۲^n} \left[\sum_{r=۰}^{n} \binom{n}{r} ۵^{\frac{r}{۲}} - \sum_{r=۰}^{n} \binom{n}{r} (-۱)^r ۵^{\frac{r}{۲}}\right] \\ &= \frac{۱}{\sqrt{۵}} \frac{۱}{۲^{n-۱}} \left[\binom{n}{۱} ۵^{\frac{۱}{۲}} + \binom{n}{۳} ۵^{\frac{۳}{۲}} + \binom{n}{۵} ۵^{\frac{۵}{۲}} + \cdots\right] \\ &= \frac{۱}{۲^{n-۱}} \left[\binom{n}{۱} + ۵\binom{n}{۳} + ۵^۲\binom{n}{۵} + \cdots\right]. \end{aligned}$$

لازم به ذکر است که تعداد جملات داخل کروشه متناهی است و تا جایی ادامه دارد که ضریب $\binom{n}{r}$ صفر شود؛ یعنی $r > n$ (چرا؟). این فرمول از نظر محاسباتی، قابل استفاده است. همچنین با توجه به این‌که $۱ > \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲} > ۰$، پس وقتی $n \to \infty$، آنگاه $(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲})^n \to ۰$ و لذا نزدیک‌ترین تقریب صحیح برای عدد اعشاری

$$\frac{۱}{\sqrt{۵}}\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^n,$$

وقتی n به حد کافی بزرگ باشد، همان f_n است. $\diamondsuit$

مثال ۱۸.۵ معادله تفاضلی به دست آمده در مثال ۹.۵ را حل کنید.

حل : معادله تفاضلی از مرتبه دوم بوده و به صورت زیر است:

$$a_n - a_{n-۱} - ۳a_{n-۲} = ۰.$$

پس معادله مشخصه زیر را داریم:

$$\lambda^۲ - \lambda - ۳ = ۰.$$

ریشه‌های این معادله مشخصه عبارتند از:

$$\lambda_۱ = \frac{۱+\sqrt{۱۳}}{۲}, \quad \lambda_۲ = \frac{۱-\sqrt{۱۳}}{۲}.$$

پس جواب عمومی این معادله تفاضلی به صورت:

$$a_n = c_۱\left(\frac{۱+\sqrt{۱۳}}{۲}\right)^n + c_۲\left(\frac{۱-\sqrt{۱۳}}{۲}\right)^n,$$

است که $c_۱$ و $c_۲$ دو عدد دلخواه هستند. با توجه به شرایط اولیه $a_۱ = ۱$ و $a_۲ = ۴$، دستگاه معادلات زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} c_۱\frac{۱+\sqrt{۱۳}}{۲} + c_۲\frac{۱-\sqrt{۱۳}}{۲} &= ۱ \\ c_۱\left(\frac{۱+\sqrt{۱۳}}{۲}\right)^۲ + c_۲\left(\frac{۱-\sqrt{۱۳}}{۲}\right)^۲ &= ۴ \end{aligned}$$

پس از حل این دستگاه معادلات، $c_۱ = \frac{۱۳+\sqrt{۱۳}}{۲۶}$ و $c_۲ = \frac{۱۳-\sqrt{۱۳}}{۲۶}$ به دست می‌آیند و جواب خصوصی که در شرایط اولیه داده شده صدق می‌کند، عبارت است از:

$$a_n = \frac{۱۳+\sqrt{۱۳}}{۲۶}\left(\frac{۱+\sqrt{۱۳}}{۲}\right)^n + \frac{۱۳-\sqrt{۱۳}}{۲۶}\left(\frac{۱-\sqrt{۱۳}}{۲}\right)^n.$$

می‌توان مانند مثال قبلی، فرمول محاسباتی ساده‌تری برای مشخص کردن اعضای دنباله نوشت. جزییات آن را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم. ◊

آنچه در اصل خطی بودن جواب‌ها گفته شد، زمانی معتبر است که معادله مشخصه ریشه‌های متمایز دارد. به عبارت دیگر، دو دنباله x_n و y_n به عنوان جواب‌های معادله تفاضلی، مستقل خطی بوده و هیچ‌کدام مضربی ثابت از دیگری نباشد. در حالت کلی، اگر معادله مشخصه، یک معادله درجه m با m ریشه متمایز $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ باشد، آنگاه جواب عمومی معادله تفاضلی همگن متناظر به صورت زیر است:

$$x_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \cdots + c_m\lambda_m^n,$$

که در آن $c_1, c_2, \ldots, c_m$ مقادیر ثابت و دلخواه هستند. ممکن است λ_i عددی مثبت، منفی و یا حتی یک عدد مختلط باشد. در دو مثال قبلی این ریشه‌ها متمایز هستند. اگر معادله مشخصه ریشه تکراری داشته باشد، آنگاه از قاعده بعدی استفاده می‌کنیم:

جواب معادله تفاضلی برای جواب‌های وابسته خطی:

اگر λ ریشه تکراری از مرتبه m برای معادله مشخصه باشد، آنگاه

$$\lambda^n,\ \ n\lambda^n,\ \ n^2\lambda^n, \ldots, n^{m-1}\lambda^n,$$

جواب‌های معادله تفاضلی همگن متناظر بوده و بنابراین، جواب عمومی به صورت

$$x_n = (c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + \cdots + c_{m-1}n^{m-1})\lambda^n,$$

است (به شرایط مشابه در معادلات دیفرانسیل توجه کنید).

مثال ۱۹.۵ معادله تفاضلی به دست آمده در مثال ۱۰.۵ را حل کنید.

حل : معادله مشخصه متناظر $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ است. این معادله ریشه مضاعف $\lambda = 1$ را دارد و لذا جواب عمومی معادله تفاضلی متناظر عبارت است از:

$$p_n = c_1\, n 1^n + c_2\, 1^n = c_1 n + c_2.$$

با توجه به شرایط مرزی داده شده $(p_0 = 0, p_N = 1)$ ، دستگاه معادلات زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} c_2 &= 0 \\ c_1 N + c_1 &= 1. \end{aligned}$$

پس $c_1 = \frac{1}{N}$ و $c_2 = 0$. لذا جواب خصوصی مساله با شرایط مرزی داده شده عبارت است از $p_n = \frac{n}{N}$. ◊

مثال ۲۰.۵ معادله تفاضلی

$$y_n = 3y_{n-1} - 3y_{n-2} + y_{n-3},$$

را با شرایط اولیه $y_0 = 0$، $y_3 = 3$ و $y_5 = 10$ حل کنید.

حل : معادله مشخصه متناظر عبارت است از:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0,$$

و این معادله تنها ریشه $\lambda = 1$ از مرتبه تکرار ۳ دارد. پس جواب عمومی این معادله تفاضلی به صورت زیر است:

$$y_n = c_1\, 1^n + c_2\, n 1^n + c_3\, n^2\, 1^n = c_1 + c_2 n + c_3 n^2.$$

با توجه به شرایط اولیه داده شده، دستگاه معادلات زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} n = 0, &\qquad c_1 &= 0 \\ n = 3, &\qquad c_1 + 3c_2 + 9c_3 &= 3 \\ n = 5, &\qquad c_1 + 5c_2 + 25c_3 &= 10. \end{aligned}$$

جواب این دستگاه معادلات عبارت است از:

$$c_1 = 0, \quad c_2 = -\frac{1}{2}, \quad c_3 = \frac{1}{2},$$

و جواب خصوصی معادله تفاضلی همگن متناظر با شرایط داده شده عبارت است از:

$$y_n = -\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

$\diamondsuit$

در تمامی این مثال‌ها، معادله تفاضلی داده شده همگن بود. زمانی که در طرف راست معادله تفاضلی، دنباله‌ای از توابع گسسته مانند f_n باشد، جواب عمومی به دست آمده برای معادله همگن، دیگر صادق نیست. برای روشن‌تر شدن بیشتر موضوع، به مثال بعدی توجه کنید.

مثال ۲۱.۵ معادله تفاضلی ناهمگن $x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} = 1$ برای $n \geq 3$ با شرایط اولیه $x_1 = 3$ و $x_2 = 3$، جواب عمومی زیر را برای معادله همگن متناظر دارد:

$$y_n = c_1 2^n + c_2(-1)^n,$$

و اگر شرایط اولیه را اعمال کنیم داریم:

$$y_n = \frac{1}{3}(2^{n+1} + (-1)^n).$$

در حالی که اگر این جواب را در معادله تفاضلی ناهمگن قرار دهیم داریم $1 = 0$ (چرا؟). با کمی دقت ملاحظه می‌شود که دنباله $p_n = -\frac{1}{2}$ در معادله تفاضلی ناهمگن صدق می‌کند؛ یعنی

$$p_n - p_{n-1} - 2p_{n-2} = -\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) - 2(-\frac{1}{2}) = 1.$$

حال اگر فرض کنیم $x_n = y_n + p_n$، آنگاه بعد از جایگذاری در معادله ناهمگن داریم:

$$\begin{aligned} x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} &= (y_n - \frac{1}{2}) - (y_{n-1} - \frac{1}{2}) - 2(y_{n-2} - \frac{1}{2}) \\ &= (y_n - y_{n-1} - 2y_{n-2}) + 1 = 1, \end{aligned}$$

زیرا y_n جواب عمومی معادله همگن متناظر است و در نتیجه x_n جواب عمومی معادله ناهمگن است.

$$x_n = c_1 2^n + c_2(-1)^n - \frac{1}{2}.$$

اگر شرایط اولیه را اعمال کنیم، دستگاه معادلات زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} 2c_1 - c_2 - \frac{1}{2} &= 1 \\ 4c_1 + c_2 - \frac{1}{2} &= 3. \end{aligned}$$

در نتیجه، $c_1 = \frac{5}{6}$ و $c_2 = \frac{1}{6}$ و لذا

$$x_n = \frac{5}{6}2^n + \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2},$$

و این همان دنباله متناظر است که در شرایط اولیه معادله تفاضلی ناهمگن نیز صدق می‌کند. ◇

دنباله p_n در مثال قبلی را **جواب خاص** معادله تفاضلی ناهمگن می‌گویند و قاعده بعدی را برای چنین مساله‌هایی داریم. برهان مانند راه حل برای معادله دیفرانسیل ناهمگن خطی با ضرایب ثابت است و نوشتن جزییات برهان به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

جواب عمومی معادله تفاضلی ناهمگن:

جواب عمومی معادله تفاضلی ناهمگن، با جمع کردن جواب عمومی معادله تفاضلی همگن متناظر و یک جواب خاص معادله ناهمگن به دست می‌آید.

جواب خاص برای معادله تفاضلی ناهمگن، معمولاً با انتخاب مناسبی از جواب عمومی معادله همگن به دست می‌آید. برای توضیح بیشتر به روش حل مثال ۸.۵ که در ادامه می‌آید؛ توجه کنید.

این معادله تفاضلی به صورت $a_n - a_{n-1} = 1$ است و معادله تفاضلی همگن متناظر عبارت است از $b_n - b_{n-1} = 0$. معادله مشخصه عبارت است از $\lambda - 1 = 0$ و ریشه آن $\lambda = 1$ است. پس برای جواب عمومی معادله همگن داریم:

$$b_n = c\, 1^n = c.$$

حال اگر فرض کنیم $p_n = A$ یک جواب خاص برای معادله تفاضلی ناهمگن باشد، با قرار دادن در معادله ناهمگن داریم $A = A + 1$ که به تناقض $1 = 0$ منجر می‌شود. با قرار دادن $p_n = An + B$، داریم:

$$A(n+1) + B = An + B + 1,$$

دنباله عددی f_n	جواب خصوصی p_n
a	A
$an+b$	$An+B$
$\vdots$	$\vdots$
$a_r n^r + a_{r-1} n^{r-1} + \cdots + a_0$	$A_r n^r + A_{r-1} n^{r-1} + \cdots + A_0$
$a\lambda^n$	$A\lambda^n$
$(an+b)\lambda^n$	$(An+B)\lambda^n$
$\vdots$	$\vdots$
$(a_r n^r + \cdots + a_0)\lambda^n$	$(A_r n^r + \cdots + A_0)\lambda^n$
$a \sin \lambda n$	$A \sin \lambda n + B \cos \lambda n$
$a \cos \lambda n$	$A \sin \lambda n + B \cos \lambda n$
$(an+b) \sin \lambda n$	$(An+B) \sin \lambda n + (Cn+D) \cos \lambda n$
$(an+b) \sin \lambda n$	$(An+B) \sin \lambda n + (Cn+D) \cos \lambda n$
$r^n \sin \lambda n$	$r^n (A \sin \lambda n + B \cos \lambda n)$
$r^n \cos \lambda n$	$r^n (A \sin \lambda n + B \cos \lambda n)$

جدول ۱.۵: جواب خاص متناظر برای برخی توابع در معادله تفاضلی خطی ناهمگن.

و بعد از ساده کردن، داریم:

$$\begin{aligned} An + (A+B) - An - B - 1 &= 0 \\ (A-A)n + A - 1 &= 0, \end{aligned}$$

که $A = 1$ را نتیجه می‌دهد و B عددی دلخواه است. بنابراین جواب عمومی معادله ناهمگن عبارت است از:

$$a_n = c + (n + B).$$

می‌توان به جای $c + B$ پارامتری مانند c_1 قرار داد. پس $a_n = n + c_1$. برای پیدا کردن c_1، از شرط اولیه استفاده می‌کنیم. به ازای $n = 1$، $a_1 = 2$ است، پس $2 = c_1 + 1$ که از آن $c_1 = 1$ نتیجه می‌شود. پس جواب مساله عبارت است از $a_n = n + 1$.

با توجه به آنچه گفته شد، حدس زدن جواب خاص، مقداری دقت لازم دارد. در جدول ۵.۱ تعدادی از جواب‌های خاص مناسب دنباله‌های عددی داده شده، آمده است. توجه کنید که در این جدول، λ ریشه معادله تفاضلی همگن متناظر نیست. در چنین حالت‌هایی، جواب خاص مساله با اندکی تغییرات مشخص می‌شود. برای این کار جواب خاص را در n ضرب کرده و دوباره امتحان می‌کنیم. در هر صورت هرچند بار که لازم باشد می‌توان از این روش برای پیدا کردن یک جواب خاص استفاده کرد.

مثال ۲۲.۵ برای دنباله‌های عددی f_n جواب خاص p_n را مشخص کنید.

$(a)\ f_n = 1$ $\quad (b)\ f_n = n$ $\quad (c)\ f_n = 2^n$

$(d)\ f_n = 3n^2 + 5$ $\quad (e)\ f_n = 2^n + (-5)^n$ $\quad (f)\ f_n = n2^n + 1$

$(g)\ f_n = 2 \times 7^n + 3n + 4$ $\quad (h)\ f_n = 6n^2 \times 3^n$

حل :

$$
\begin{array}{llll}
(a) & p_n = A & (b) & p_n = An + b \\
(c) & p_n = A۲^n & (d) & p_n = An^۲ + Bn + C \\
(e) & p_n = A۲^n + B(-۵)^n & (f) & p_n = (An + B)۲^n + C \\
(g) & p_n = A۷^n + Bn + C & (h) & p_n = (An^۲ + Bn + C)۳^n.
\end{array}
$$

لازم به ذکر است که تمامی این جواب‌های خاص با این فرض نوشته شده‌اند که جواب‌های معادله همگن متناظر با دنباله داده شده، مستقل خطی هستند. در غیر این صورت با ضرب کردن جواب خاص در n (تا هرجا که لازم باشد)، جواب خاص مناسب را تولید می‌کنیم. ◇

مثال ۲۳.۵ معادله تفاضلی $x_{n+۲} - ۴x_{n+۱} + ۴x_n = ۲^n$ را با شرط $x_۰ = x_۱ = ۰$ حل کنید.

حل : معادله تفاضلی همگن عبارت است از

$$x_{n+۲} - ۴x_{n+۱} + ۴x_n = ۰$$

که جواب عمومی متناظر $x_n = A۲^n + Bn۲^n$ است. برای به دست آوردن جواب خاص، اگر $p_n = A۲^n$ را در نظر بگیریم، داریم:

$$
\begin{aligned}
p_{n+۲} - ۴p_{n+۱} + ۴p_n &= ۲^n \\
A۲^{n+۲} - ۴A۲^{n+۱} + ۴A۲^n &= ۲^n \\
A۲^n(۴ - ۸ + ۴) &= ۲^n \\
A \times ۰ &= ۱.
\end{aligned}
$$

این یک تناقض است. پس جواب خاص را اصلاح کرده و به صورت $p_n = An۲^n$ در نظر می‌گیریم. در این صورت داریم:

$$
\begin{aligned}
A(n+۲)۲^{n+۲} - ۴A(n+۱)۲^{n+۱} + ۴An۲^n &= ۲^n \\
A۲^n(۴(n+۲) - ۸(n+۱) + ۴n) &= ۲^n \\
A(۴n + ۸ - ۸n - ۸ + ۴n) &= ۱ \\
A \times ۰ &= ۱.
\end{aligned}
$$

دوباره این یک تناقض است. پس بار دیگر $p_n = An^۲۲^n$ را به عنوان جواب خاص در نظر می‌گیریم. داریم

$$
\begin{aligned}
A(n+۲)^۲۲^{n+۲} - ۴A(n+۱)^۲۲^{n+۱} + ۴An^۲۲^n &= ۲^n \\
A۲^n(۴(n+۲)^۲ - ۸(n+۱)^۲ + ۴n^۲) &= ۲^n \\
A(۴n^۲ + ۱۶n + ۱۶ - ۸n^۲ - ۱۶n - ۸ + ۴n^۲) &= ۱ \\
۸ \times A &= ۱.
\end{aligned}
$$

این معادله، جواب $A = \frac{۱}{۸}$ را دارد. پس جواب خاص معادله ناهمگن به صورت

$$p_n = \frac{۱}{۸}n^۲۲^n = n۲^{n-۳}$$

است. توجه داشته باشید که معادله مشخصه برای معادله تفاضلی همگن ریشه مضاعف $\lambda = ۲$ داشت و علاوه بر آن، این ریشه در طرف راست معادله تفاضلی ناهمگن نیز ظاهر شده است. به این علت ضریب $n^۲$ در جواب خاص استفاده شده‌است.

جواب عمومی معادله تفاضلی ناهمگن عبارت است از:

$$x_n = c_۱ ۲^n + c_۲ n ۲^n + n^۲ ۲^{n-۳}.$$

با توجه به شرایط اولیه، دستگاه معادلات زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} c_۱ &= ۱ \\ ۲c_۱ + ۲c_۲ + \frac{۱}{۴} &= ۰, \end{aligned}$$

که $c_۱ = ۰$ و $c_۲ = \frac{۱}{۸}$ جواب این دستگاه معادلات است. پس

$$x_n = ۰ \times ۲^n + (-\frac{۱}{۸}) n ۲^n + n^۲ ۲^{n-۳} = n(n-۱)۲^{n-۳}.$$

$\diamondsuit$

در ادامه بحث، حالتی را در نظر می‌گیریم که معادله مشخصه، ریشه مختلط دارد.

مثال ۲۴.۵ معادله تفاضلی $x_{n+۱} = x_n - x_{n-۱}$ را با شرایط اولیه $x_۰ = ۰$ و $x_۱ = ۱$ حل کنید.

حل : معادله مشخصه متناظر $\lambda^۲ - \lambda + ۱ = ۰$ است که دو ریشه مختلط زیر را دارد:

$$\lambda_۱ = \frac{۱ + \sqrt{-۳}}{۲}, \quad \lambda_۲ = \frac{۱ - \sqrt{-۳}}{۲}.$$

بنابراین جواب عمومی این معادله به صورت زیر است:

$$x_n = c_۱ \lambda_۱^n + c_۲ \lambda_۲^n.$$

با توجه به شرایط اولیه مساله، دستگاه معادلات زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} c_۱ + c_۲ &= ۰ \\ c_۱\lambda_۱ + c_۲\lambda_۲ &= ۱, \end{aligned}$$

که $c_۱ = \frac{۱}{\sqrt{-۳}}$ و $c_۲ = -\frac{۱}{\sqrt{-۳}}$ را نتیجه می‌دهد. پس:

$$x_n = \frac{۱}{\sqrt{-۳}} \left(\frac{۱ + \sqrt{-۳}}{۲}\right)^n - \frac{۱}{\sqrt{-۳}} \left(\frac{۱ - \sqrt{-۳}}{۲}\right)^n$$

حال با توجه به این‌که

$$\lambda_۱ = \cos\frac{\pi}{۳} + i\sin\frac{\pi}{۳}, \quad \lambda_۲ = \cos\frac{\pi}{۳} - i\sin\frac{\pi}{۳},$$

داریم:

$$\lambda_1^n = \cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}, \quad \lambda_2^n = \cos\frac{n\pi}{3} - i\sin\frac{n\pi}{3},$$

بعد از مقداری محاسبات جبری؛ نتیجه می‌شود:

$$x_n = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3}.$$

$\diamondsuit$

مثال ۲۵.۵ معادله تفاضلی $x_n = 2x_{n-1} - 2x_{n-2}$ را با شرایط اولیه $x_0 = 1$ و $x_1 = 2$ حل کنید.

حل : در این مساله، معادله مشخصه $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ است که دو عدد مختلط $1 \pm i$ ریشه‌های آن هستند و داریم:

$$\lambda_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \quad \lambda_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

و بنابراین

$$\lambda_1^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right), \quad \lambda_2^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

پس

$$x_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n = 2^{\frac{n}{2}}\left((A+B)\cos\frac{n\pi}{4} + i(A-B)\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

برای سادگی کار، فرض کنید $c_1 = A + B$ و $c_2 = i(A-B)$ و داریم:

$$x_n = 2^{\frac{n}{2}}\left(c_1\cos\frac{n\pi}{4} + c_2\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

با استفاده از شرایط اولیه مساله، معادلات زیر به دست می‌آید:

$$c_1 = 1, \quad c_1 + c_2 = 2.$$

پس

$$x_n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + \sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

با ساده کردن این معادله نتیجه واضح‌تر زیر تولید می‌شود:

$$x_n = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}} & n = 4k, n = 4k+1 \\ -2^{\frac{n}{2}} & n = 4k+2, n = 4k+3 \end{cases}$$

$\diamondsuit$

تمرین ۳.۵

۱. معادلات تفاضلی به دست آمده در تمرین‌های بخش ۲.۵ را حل کنید.

۲. معادله تفاضلی $a_n = ۴(a_{n-۱} - a_{n-۲})$ برای $n \geq ۳$ و $a_۱ = ۰$ و $a_۲ = ۴$ را حل کرده و مقدار a_n را بیابید.

۳. معادله تفاضلی $a_n = ۵a_{n-۱} - ۶a_{n-۲}$ برای $n \geq ۳$ و $a_۱ = a_۲ = ۱$ را حل کرده و مقدار a_n را بیابید.

۴. فرض کنید

$$b_n = \binom{n}{۰} + \binom{n-۱}{۱} + \binom{n-۲}{۲} + \cdots$$

تحقیق کنید $b_۱ = ۱$ و $b_۲ = ۲$ و ثابت کنید برای هر $n \geq ۳$ داریم:

$$b_n = b_{n-۱} + b_{n-۲},$$

و بنابراین، b_n جوابی دیگر برای دنباله فیبوناتچی است.

۵. معادله تفاضلی $a_n = ۵a_{n-۱} - ۸a_{n-۲} + ۴a_{n-۳}$ برای $n \geq ۴$ با شرایط اولیه $a_۱ = ۸$، $a_۲ = ۴$ و $a_۳ = ۲۴$ را حل کرده و مقدار a_n را بیابید. چند جمله اول این دنباله را بنویسید.

۶. معادلات تفاضلی زیر را با شرایط اولیه داده شده حل کنید.

(آ) $x_n - ۲x_{n-۱} = ۶$ و $x_۱ = ۲$.

(ب) $x_{n+۲} - x_{n+۱} - ۲x_n = ۱$ و $x_۱ = ۱, x_۲ = ۳$.

(ج) $x_{n+۲} + ۲x_{n+۱} - ۱۵x_n = ۶n + ۱۰$ و $x_۰ = ۱, x_۱ = -\frac{۱}{۲}$.

(د) $x_{n+۲} - x_{n+۱} - ۶x_n = ۱۸n^۲ + ۲$ و $x_۰ = -۲, x_۱ = ۰$.

(ه) $x_{n+۱} - ۲x_n = ۳ + ۴^n$ و $x_۰ = ۲$.

(و) $۲x_{n+۱} - x_n = (\frac{۱}{۲})^n$ و $x_۱ = ۲$.

(ز) $x_{n+۲} - ۲x_{n+۱} + x_n = ۱$ و $x_۰ = ۱, x_۱ = \frac{۱}{۲}$.

(ح) $x_{n+۲} - ۸x_{n+۱} + ۱۶x_n = (-۱)^n$ و $x_۰ = ۰, x_۱ = ۰$.

(ط) $x_{n+۱} + x_n = ۵$ و $x_۰ = ۱$.

(ی) $x_n - ۳x_{n-۱} + ۳x_{n-۲} - x_{n-۳} = -۱$ و $x_۰ = ۱, x_۱ = ۱, x_۲ = ۰$.

(ک) $x_n - ۳x_{n-۱} + ۲x_{n-۲} = n^۲$ و $x_۰ = ۰, x_۱ = ۰$.

(ل) $x_n = \begin{cases} ۳x_{n-۱} & \text{زوج } n \\ ۲x_{n-۱} + ۱ & \text{فرد } n \end{cases}$ و $x_۰ = ۰$.

(م) $x_{n+۲} + ۲x_{n+۱} + ۲x_n = ۰$ و $x_۰ = ۰, x_۱ = ۱$.

(ن) $x_{n+۲} - x_{n+۱} + x_n = ۳ \times ۲^n$ و $x_۰ = ۱, x_۱ = ۳$.

(س) $x_{n+۴} - ۱۶x_n = n + ۳^n$ و $x_۰ = x_۱ = x_۲ = x_۳ = ۱$.

(ع) $x_{n+۲} + x_n = ۵\cos\frac{n\pi}{۲}$ و $x_۰ = ۰, x_۱ = ۱$.

(ف) $x_{n+۲} + ۴x_n = ۵\cos\frac{n\pi}{۲}$ و $x_۰ = ۰, x_۱ = ۱$.

(ص) $x_{n+2}+x_n=3\cos\frac{n\pi}{2}+2\sin\frac{n\pi}{2}$ و $x_0=0, x_1=1$.

(ق) $x_{n+2}+x_n=3\cos\frac{n\pi}{2}+2\sin\frac{n\pi}{3}$ و $x_0=0, x_1=1$.

(ر) $x_n-x_{n-1}-2x_{n-2}=\cos n\pi$ و $x_0=0, x_1=1$.

۷. برای $f_n=A2^n+B3^n+4$، ثابت‌های p، q و r را چنان بیابید که رابطه

$$f_n+pf_{n-1}+qf_{n-2}=r,$$

برقرار باشد.

۴.۵ توابع مولد

در این بخش ابزار قوی و مفید دیگری به نام **تابع مولد** را برای حل معادله‌های بازگشتی ارائه می‌کنیم. توابع مولد ابزار مهمی در ریاضیات گسسته هستند و کاربرد آنها به حل معادله‌های بازگشتی محدود نمی‌شود.

تابع مولد توانی برای دنباله متناهی:

اگر $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ دنباله‌ای متناهی از اعداد باشد، تابع مولد توانی برای این دنباله، یک چندجمله‌ای مانند

$$G(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n,$$

است که در آن x یک متغیر دلخواه است.

مثال ۲۶.۵ تابع مولد برای دنباله $3, -4, 7$، چندجمله‌ای $3-4x+7x^2$ و تابع مولد توانی برای دنباله $1, 0, 3, -4, 7$، چندجمله‌ای x^4+3x^2-4x+7 است. $\diamondsuit$

مثال ۲۷.۵ تابع مولد برای دنباله ضرایب دوجمله‌ای درجه n را بنویسید.

حل : دنباله ضرایب دوجمله ای از درجه n به صورت

$$a_k=\binom{n}{k},$$

که در آن $0\le k\le n$ است. بنابراین، تابع مولد برای این دنباله متناهی به صورت

$$G(x)=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{n}x^n=(1+x)^n,$$

است. $\diamondsuit$

تابع مولد توانی برای دنباله نامتناهی:

اگر $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ یک دنباله نامتناهی از اعداد باشد، تابع مولد برای این دنباله به صورت

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

تعریف می شود.

یادآوری این نکته مهم است که در تابع مولد، x یک متغیر ظاهری بوده و مفهوم دیگری ندارد. در واقع، هیچ مقداری به متغیر x در تابع مولد نسبت داده نمی‌شود.

مثال ۲۸.۵ تابع مولد برای دنباله نامتناهی $1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \ldots$ را بنویسید.

حل : تابع مولد این دنباله به صورت

$$G(x) = 1 + \lambda x + \lambda^2 x^2 + \lambda^3 x^3 + \cdots ,$$

است. از طرف دیگر

$$G(x) - 1 = \lambda x(1 + \lambda x + \lambda^2 x^2 + \lambda^3 x^3 + \cdots) = \lambda x G(x),$$

است. پس شکل ساده شده این تابع به صورت

$$G(x) = \frac{1}{1 - \lambda x},$$

است. $\diamondsuit$

مثال ۲۹.۵ تابع مولد برای دنباله فیبوناتچی را بنویسید.

حل : دنباله فیبوناتچی با معادله بازگشتی $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ برای $n \geq 2$ و $f_0 = 1$ و $f_1 = 2$ تعریف می‌شود. فرض کنید

$$F(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + \cdots ,$$

تابع مولد این دنباله است. طرفین معادله بازگشتی دنباله فیبوناتچی را در x^n برای $n \geq 2$ ضرب کرده و روی n جمع می‌بندیم . داریم:

$$\sum_{n=2}^{\infty} f_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} x^n. \qquad (۹.۵)$$

از طرف دیگر داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} f_n x^n &= f_2x^2 + f_3x^3 + \cdots = F(x) - f_0 - f_1x,\\ \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} x^n &= f_1x^2 + f_2x^3 + f_3x^4 + \cdots\\ &= x(f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + \cdots)\\ &= x(F(x) - f_0),\\ \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} x^n &= f_0x^2 + f_1x^3 + f_2x^4 + \cdots\\ &= x^2(f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + \cdots)\\ &= x^2F(x).\end{aligned}$$

با جایگذاری این معادلات در (۹.۵) داریم:

$$F(x) - f_0 - f_1x = x(F(x) - f_0) + x^2F(x).$$

با استفاده از مقادیر f_0 و f_1 تابع مولد برای دنباله فیبوناتچی به صورت

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2},$$

است. ◊

مثال ۳۰.۵ تابع مولد برای معادله بازگشتی

$$y_n + 2y_{n-1} - 15y_{n-2} = 0,$$

برای $n \geq 2$ بنویسد که در آن $y_0 = 0$ و $y_1 = 1$.

حل : طرفین معادله بازگشتی را در x^n ضرب کرده و معادله‌های به دست آمده را برای $n \geq 2$ با هم جمع می‌کنیم. مطابق آنچه در مثال ۲۹.۵ انجام دادیم، داریم:

$$G(x) - y_0 - y_1x + 2x(G(x) - y_0) - 15x^2G(x) = 0,$$

و بنابراین

$$G(x) = \frac{y_0 + (2y_0 + y_1)x}{1 + 2x - 15x^2}.$$

با قرار دادن شرایط اولیه، تابع مولد به صورت

$$G(x) = \frac{x}{1 + 2x - 15x^2},$$

مشخص می‌شود. ◊

آنچه در مثال ۳۰.۵ برای $G(x)$ به دست آمد، جواب صریحی را برای اعضای دنباله ارائه نمی‌کند. برای به دست آوردن نمایش صریح اعضای دنباله، کسر به دست آمده در تابع مولد را به کسرهای جزیی تفکیک کرده و از بسط کسرهای جزیی به سری توانی، اعضای دنباله را مشخص می‌کنیم. برای تابع مولد مثال ۳۰.۵ داریم:

$$G(x) = \frac{x}{1+2x-15x^2} = \frac{x}{(1-3x)(1+5x)} = \frac{\frac{1}{8}}{1-3x} - \frac{\frac{1}{8}}{1+5x}.$$

بنابراین

$$G(x) = \frac{1}{8}(1+3x+3^2x^2+\cdots) - \frac{1}{8}(1-5x+5^2x^2-5^3x^3+\cdots),$$

و در نتیجه

$$y_n = \frac{1}{8}3^n - \frac{1}{8}(-5)^n.$$

مثال ۳۱.۵ با استفاده از تابع مولد دنباله فیبوناتچی، عضو عمومی این دنباله را مشخص کنید.

حل : ابتدا تابع مولد دنباله فیبوناتچی را به صورت مجموع کسرهای جزیی می‌نویسیم. داریم:

$$G(x) = \frac{1}{1-x-x^2} = \frac{A}{1-\lambda_1 x} + \frac{B}{1-\lambda_2 x},$$

که در آن $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$، $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$، $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ و $B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. با استفاده از بسط به سری هندسی تابع‌های $\frac{1}{1-\lambda_2 x}$ و $\frac{1}{1-\lambda_1 x}$ داریم:

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1+\lambda_1 x+\lambda_1^2x^2+\cdots) - \frac{1}{\sqrt{5}}(1+\lambda_2 x+\lambda_2^2x^2+\cdots).$$

پس

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\lambda_1^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\lambda_2^n,$$

و این همان جوابی است که در مثال ۱۷.۵ به دست آمد. ◇

مثال ۳۲.۵ دنباله اعداد صحیح $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ که اعضای آن در رابطه بازگشتی

$$b_n - 2b_{n-1} - b_{n-2} + 2b_{n-3} = \begin{cases} 1 & n=3 \\ 0 & n\geq 4 \end{cases}$$

با شرایط اولیه $b_0 = b_1 = 0$ و $b_2 = 2$ صدق می‌کنند را در نظر بگیرید. تابع مولد این دنباله را بنویسید.

حل : فرض کنید

$$B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots ,$$

تابع مولد این دنباله است. ابتدا طرفین رابطه بازگشتی را در x^n ضرب کرده و سپس معادله‌های به دست آمده را با هم جمع می‌کنیم. داریم:

$$\sum_{n=3}^{\infty} x^n (b_n - 2b_{n-1} - b_{n-2} + 2b_{n-3}) = 1x^3 + 0x^4 + 0x^5 + \cdots = x^3.$$

پس

$$\begin{aligned}(B(x) - b_0 - b_1 x - b_2 x^2) - 2x(B(x) - b_0 - b_1 x)\\ -x^2(B(x) - b_0) + 2x^3 B(x) = x^3,\end{aligned}$$

و بعد از ساده کردن تابع مولد متناظر به صورت

$$B(x) = \frac{2x^2 + x^3}{1 - 2x - x^2 + 2x^3},$$

است. $\diamondsuit$

استفاده از تابع مولد در حل بسیاری از مسایل ریاضیات گسسته رایج است. به مثال بعدی توجه کنید.

مثال ۳۳.۵ با استفاده از تابع مولد، تعداد جواب‌های معادله $x_1 + x_2 = n$ را مشخص کنید که در آن

$$x_1 \in A = \{0, 1, 2, 3, 4\},\ x_2 \in B = \{2, 3, 4\}.$$

حل : تعداد جواب‌های این معادله را با g_n نشان می‌دهیم. واضح است که $g_0 = 0$ ، $g_1 = 0$ و تابع مولد متناظر به صورت

$$G(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \cdots ,$$

است. تابع مولد برای مجموعه A را به صورت

$$G_A(x) = \sum_{a \in A} x^a = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4,$$

و به همین ترتیب، تابع مولد برای مجموعه B را به صورت

$$G_B(x) = \sum_{b \in B} x^b = x^2 + x^3 + x^4,$$

تعریف می‌کنیم. به وضوح ملاحظه می‌شود که

$$G(x) = G_A(x) \times G_B(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(x^2 + x^3 + x^4).$$

زیرا جمله عمومی طرف راست این معادله به صورت x^{a+b} است که در آن $a \in A$ و $b \in B$. پس

$$G(x) = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + 3x^6 + 2x^7 + x^8.$$

با استفاده از این تابع، جواب‌های مساله برای nهای مختلف مشخص می‌شود. ◇

روش ارائه شده در مثال قبلی را می‌توان در حالت کلی‌تر نیز اجرا کرد. به عنوان نمونه به مثال بعدی توجه کنید.

مثال ۳۴.۵ فرض کنید g_n تعداد جواب‌های صحیح معادله

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n,$$

است که در آن $n \geq 0$ یک عدد صحیح نامنفی بوده و $x_1 \geq 0$، $4 \leq x_2 \leq 7$، $2 \leq x_3 \leq 6$ و $x_4 \geq 13$. تابع مولد را برای دنباله $\{g_n\}$ مشخص کنید.

حل : مجموعه‌های A_1, A_2, A_3, A_4 را به صورت

$$\begin{array}{rcl} A_1 &=& \{0, 1, 2, 3, \ldots\}, \\ A_2 &=& \{4, 5, 6, 7\}, \\ A_3 &=& \{2, 3, 4, 5, 6\}, \\ A_4 &=& \{13, 14, 15, \ldots\}, \end{array}$$

تعریف می‌کنیم. با توجه به روش بیان شده در مثال قبلی، ابتدا تابع مولد را برای این مجموعه‌ها به صورت

$$\begin{array}{rcl} G_{A_1}(x) &=& 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, \\ G_{A_2}(x) &=& x^4 + x^5 + x^6 + x^7, \\ G_{A_3}(x) &=& x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6, \\ G_{A_4}(x) &=& x^{13} + x^{14} + x^{15} + \cdots, \end{array}$$

می‌نویسیم. پس تابع مولد این دنباله به صورت

$$\begin{array}{rcl} G(x) &=& G_{A_1}(x)G_{A_2}(x)G_{A_3}(x)G_{A_4}(x) \\ &=& \dfrac{1}{1-x}(x^4 + x^5 + x^6 + x^7)(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)\dfrac{x^{13}}{1-x} \\ &=& \dfrac{x^{19}(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)}{(1-x)^2}, \end{array}$$

است. ◇

مثال ۳۵.۵ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله سیاله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$ را با استفاده از تابع مولد بیابید.

حل : فرض کنید g_n نشان دهنده تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله سیاله است. برای $1 \leq i \leq 4$، مجموعه‌های $A_i = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ را تعریف کرده و داریم:

$$G_{A_i}(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

بنابراین

$$G(x) = (G_{A_i}(x))^4 = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^4 = (1-x)^{-4}.$$

با توجه به قضیه ۴.۳، جواب مساله

$$g_n = (-1)^n \binom{n-3}{n},$$

است. مثلاً برای $n = 25$، تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله سیاله $g_{25} = 3276$ است.
$\diamondsuit$

مثال ۳۶.۵ با استفاده از تابع مولد، تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از مجموعه n عضوی $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ که شامل اعداد متوالی نیستند را بیابید.

حل : برای این کار، فرض کنید زیرمجموعه مورد نظر $S_r = \{s_1, s_2, \ldots, s_r\}$ است که در آن برای هر $r \leq i \leq 1$، $s_i \in S_r$ و $1 \leq s_1 < s_2 < s_3 < \cdots < s_r \leq n$. در این صورت

$$s_1 \geq 1,\ s_2 - s_1 \geq 2, \ldots, s_r - s_{r-1} \geq 2.$$

دنباله y_i را به صورت

$$\begin{aligned} y_1 &= s_1, \\ y_i &= s_i - s_{i-1}, \quad 2 \leq i \leq r \\ y_{r+1} &= n - s_r, \end{aligned}$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_r + y_{r+1} &= y_1 + \sum_{i=2}^{r} y_i + y_{r+1} \\ &= y_1 + \sum_{i=2}^{r} (s_i - s_{i-1}) + y_{r+1} \\ &= s_1 + (s_r - s_1) + (n - s_r) = n. \end{aligned}$$

پس متناظر با هر زیرمجموعه مناسب S_r، معادله سیاله

$$y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_r + y_{r+1} = n,$$

را داریم که در آن $y_1 \geq 1$، $y_i \geq 2$ برای هر $2 \leq i \leq r$ و $y_{r+1} \geq 0$. بنابراین، تعداد زیرمجموعه‌هایی از نوع S_r با تعداد جواب‌های صحیح این معادله سیاله مساوی است. برای مشخص کردن تعداد این جواب‌ها از تابع مولد استفاده می‌کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} G(x) &= (x + x^2 + x^3 + \cdots)(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^{r-1}(1 + x + x^2 + \cdots) \\ &= x(1 + x + x^2 + \cdots)\left[x^2(1 + x + x^2 + \cdots)\right]^{r-1}(1 + x + x^2 + \cdots) \\ &= x^{2r-1}(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^{r+1} \\ &= x^{2r-1}\frac{1}{(1-x)^{r+1}} = x^{2r-1}(1-x)^{-r-1}. \end{aligned}$$

بنابراین کافی است ضریب x^n را در $G(x)$ مشخص کنیم. به عبارت دیگر ضریب $x^{n-۲r+۱}$ را در بسط تابع $(۱-x)^{-(۱+r)}$ پیدا می‌کنیم. مطابق قضیه ۴.۳، داریم:

$$(۱-x)^{-(r+۱)} = \sum_{k=۰}^{\infty} \binom{r+k}{k} x^k,$$

ضریب $x^{n-۲r+۱}$ عبارت است از:

$$\binom{n-r+۱}{n-۲r+۱}.$$

مثلاً برای حالت خاص $n = ۱۵$ و $r = ۴$، این ضریب با

$$\binom{۱۲}{۸} = ۴۹۵,$$

برابر است. $\diamondsuit$

مثال ۳۷.۵ (افرازهای اعداد صحیح) فرض کنید n یک عدد صحیح و مثبت است. به چند روش می‌توان n را به صورت مجموع اعداد کمتر یا مساوی با n نوشت؟ جواب مساله را با استفاده از تابع مولد بیابید.

حل : تعداد افرازهای n را با $P(n)$ نشان می‌دهیم. در این صورت

$$\begin{array}{ll}
P(۱) = ۱ & ۱ = ۱, \\
P(۲) = ۲ & ۲ = ۲,\ ۲ = ۱ + ۱ \\
P(۳) = ۳ & ۳ = ۳,\ ۳ = ۲ + ۱,\ ۳ = ۱ + ۱ + ۱ \\
P(۴) = ۵ & ۴ = ۴,\ ۴ = ۳ + ۱,\ ۴ = ۲ + ۲,\ ۴ = ۲ + ۱ + ۱, \\
 & ۴ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱.
\end{array}$$

برای هر عدد صحیح و نامنفی n، تعداد i ها در یک افراز را با a_i نشان می‌دهیم که در آن $i \geq ۱$. واضح است که $a_i \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. به این ترتیب، تعداد افرازهای عدد صحیح و مثبت n متناظر با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله سیاله $a_۱ + a_۲ + \cdots = n$ است. اگر تعداد جواب‌های این مساله را با f_n نشان دهیم، تابع مولد $F(x)$ برای این دنباله به صورت

$$(۱ + x + x^۲ + \cdots)(۱ +^۲ + x^۴ + \cdots)(۱ + x^۳ + x^۶ + \cdots)\cdots = \sum_{n=۰}^{\infty} P(n)x^n,$$

است (نشان دهید) . بهتر است تابع $F(x)$ را به صورت ساده شدهٔ

$$F(x) = \frac{۱}{۱-x}.\frac{۱}{۱-x^۲}.\frac{۱}{۱-x^۳}.\cdots = \prod_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۱-x^n},$$

بنویسیم. به عنوان مثال، برای $n = ۱۰$، تعداد جواب‌های مساله مساوی ضریب $x^{۱۰}$ در $F(x)$ است (پیدا کنید). $\diamondsuit$

مثال ۳۸.۵ شرکتی مایل است n دقیقه زمان برای تبلیغ محصولات خود از یک شبکه تلویزیونی بخرد. اگر مدت زمان پخش تبلیغ به صورت ۳۰ ثانیه‌ای، یک دقیقه‌ای یا دو دقیقه‌ای باشد، این شرکت به چند روش می‌تواند وقت تبلیغ داشته باشد؟

حل : اگر ۳۰ ثانیه را واحد زمانی در نظر بگیریم، آنگاه جواب این مساله مساوی با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله سیاله

$$x_۱ + ۲x_۲ + ۴x_۳ = ۲n,$$

است که در آن $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ به ترتیب تعداد تبلیغ‌های ۳۰، ۶۰ و ۱۲۰ ثانیه‌ای است. با تعریف متغیرهای جدید به صورت

$$y_۱ = x_۱, \;\; y_۲ = ۲x_۲, \;\; y_۳ = ۴x_۳,$$

رابطه زیر بین این متغیرها برقرار است

$$y_۱ + y_۲ + y_۳ = ۲n,$$

که در آن

$$\begin{array}{lcl} y_۱ & \in & \{۰, ۱, ۲, \ldots\} \\ y_۲ & \in & \{۰, ۲, ۴, \ldots\} \\ y_۳ & \in & \{۰, ۴, ۸, \ldots\}. \end{array}$$

اگر تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله سیاله را به f_n نشان دهیم، تابع مولد این دنباله به صورت

$$\begin{array}{lcl} F(x) & = & (۱ + x + x^۲ + \cdots)(۱ + x^۲ + x^۴ + \cdots)(۱ + x^۴ + x^۸ + \cdots) \\ & = & \frac{۱}{۱ - x}.\frac{۱}{۱ - x^۲}.\frac{۱}{۱ - x^۴}, \end{array}$$

است. ضریب $x^{۲n}$ در تابع $F(x)$ جواب مساله است (با استفاده از تفکیک $F(x)$ به کسرهای جزیی، این ضریب را مشخص کنید). $\diamondsuit$

مثال ۳۹.۵ تعداد افرازهای عدد صحیح و مثبت n به مجموع اعداد متمایز را با $p_\alpha(x)$ نشان داده و تابع مولد آن را بیابید.

حل : تابع مولد این دنباله را با $P_\alpha(n)$ نشان می‌دهیم. برای درک بهتر روش حل مساله، ابتدا تمامی افرازهای مناسب را برای حالت خاص $n = ۶$ می‌نویسیم. این افرازها به صورت

$$۱ + ۵ = ۶, \;\; ۱ + ۲ + ۳ = ۶, \; ۲ + ۴ = ۶, \; ۶ = ۶,$$

است. بنابراین $p_\alpha(۶) = ۴$. برای محاسبه $P_\alpha(n)$، اگر k یکی از عوامل افراز باشد آنگاه، $۱ + x^k$ در تابع مولد حضور دارد (چرا؟). بنابراین تابع مولد برای اعضای این دنباله به صورت

$$P_\alpha(n) = (۱ + x)(۱ + x^۲)(۱ + x^۳) \cdots = \prod_{k=۱}^{n} (۱ + x^k),$$

است. برای هر عدد صحیح و مثبت n، ضریب x^n در

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^n),$$

جواب مساله است (چرا؟). به عنوان مثال، نشان دهید ضریب x^6 در

$$(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^6),$$

$p_\alpha(6)=4$ است. ◇

اگر در مثال‌هایی که تا به حال با استفاده از تابع مولد توانی حل شدند، دقت نمایید، سختی کار در محاسبه ضرایب به وضوح مشاهده می‌شود. در ادامه، تابع مولد نمایی را معرفی می‌کنیم که مزیت سادگی در محاسبه ضرایب را دارد.

تابع مولد نمایی برای دنباله نامتناهی:

برای دنباله حقیقی $\{a_n\}_0^\infty$، تابع

$$F(x)=a_0+a_1\frac{x}{1!}+a_2\frac{x^2}{2!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n,$$

را **تابع مولد نمایی** می‌نامند.

مثال ۴۰.۵ به چند روش می‌توان چهار حرف از حروف کلمه ENGINE را انتخاب و مرتب کرد؟ پاسخ سوال را با استفاده از تابع مولد نمایی مشخص کنید.

حل : چون در ترتیب‌های چهار حرفی، حرف E ممکن است صفر، یک و یا دو بار ظاهر شود، پس از تابع مولد $1+x+\frac{x^2}{2!}$ استفاده می‌کنیم. همچنین ممکن است حرف G در این ترتیب صفر و یا یک بار ظاهر شود. بنابراین عبارت متناظر با آن در تابع مولد $1+x$ است. به روش مشابه، برای دو حرف N و I نیز عبارت‌های مشابهی را در تابع مولد داریم. تابع مولد برای این مساله به صورت

$$G(x)=(1+x+\frac{x^2}{2!})^2(1+x)^2,$$

است و تعداد روش‌های مورد نظر، ضریب $\frac{x^4}{4!}$ است. تمامی جملات با توان چهار را با هم جمع می‌کنیم. داریم:

$$\frac{x^4}{2!2!}+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^4}{2!}+x^4.$$

برای پیدا کردن ضریب $\frac{x^4}{4!}$ این جملات را به صورت

$$\frac{x^4}{4!}\left(\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!}+4!\right),$$

مرتب می‌کنیم. به سادگی می‌توان مشاهده کرد که ضریب $\frac{x^4}{4!}$، ۱۰۲ است. ◇

مثال ۴۱.۵ شرکتی ۱۱ کارمند جدید استخدام کرده است که باید در چهار کارگاه این شرکت کار کنند، به طوری که در هر کارگاه حداقل یک نفر کار کند. تعداد روش‌های ممکن را با استفاده از تابع مولد نمایی مشخص کنید.

حل : کارگاه‌های این شرکت را با حروف A، B، C و D نشان می‌دهیم. هر ترتیب ۱۱ حرفی از این چهار حرف متناظر با یکی از حالت‌های مشغول به کار شدن این یازده نفر در چهار کارگاه است. تابع مولد نمایی برای این ترتیب حروف عبارت است از:

$$\begin{aligned} F(x) &= (x+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۳}{۳!}+\cdots)^۴ \\ &= (e^x-۱)^۴ \\ &= e^{۴x}-۴e^{۳x}+۶e^{۲x}-۴e^x+۱. \end{aligned}$$

ضریب $\frac{x^{۱۱}}{۱۱!}$ تعداد روش‌های انجام کار است و این مقدار

$$۴^{۱۱}-۴\times ۳^{۱۱}+۶\times ۲^{۱۱}\times ۱^{۱۱}=\sum_{i=۰}^{۳}(-۱)^i\binom{۴}{i}(۴-i)^{۱۱},$$

است. این مقدار با تعداد توابع پوشا از یک مجموعه یازده عضوی به یک مجموعه چهار عضوی برابر است (توصیف ترکیبیاتی برای این برابری بیان کنید). $\diamondsuit$

از تابع مولد می‌توان برای حل دستگاه معادلات بازگشتی نیز استفاده کرد. به عنوان نمونه به مثال بعدی توجه کنید.

مثال ۴۲.۵ دستگاه معادلات بازگشتی

$$\begin{cases} a_{n+۱} = ۲a_n+b_n \\ b_{n+۱} = a_n+b_n \end{cases},$$

را با شرایط اولیه $a_۰=۱$ و $b_۰=۰$ با استفاده از تابع مولد حل کنید.

حل : فرض کنید $F(x)=\sum_{n=۰}^{\infty}a_nx^n$ و $G(x)=\sum_{n=۰}^{\infty}b_nx^n$ به ترتیب تابع‌های مولد دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ برای $n\geq ۰$ باشند. با استفاده از دستگاه معادلات داریم:

$$\begin{aligned} a_{n+۱}x^{n+۱} &= ۲a_nx^{n+۱}+b_nx^{n+۱} \\ b_{n+۱}x^{n+۱} &= a_nx^{n+۱}+b_nx^{n+۱}. \end{aligned}$$

با جمع کردن این معادلات برای $n\geq ۰$، معادلات

$$\begin{aligned} \sum_{n=۰}^{\infty}a_{n+۱}x^{n+۱} &= ۲x\sum_{n=۰}^{\infty}a_nx^n+x\sum_{n=۰}^{\infty}b_nx^n \\ \sum_{n=۰}^{\infty}b_{n+۱}x^{n+۱} &= x\sum_{n=۰}^{\infty}a_nx^n+x\sum_{n=۰}^{\infty}b_nx^n \end{aligned}$$

به دست می‌آیند. بر حسب دو تابع $F(x)$ و $G(x)$ به عنوان مجهول، دستگاه معادلات

$$\left\{\begin{array}{lll} F(x)-a_۰ &=& ۲xF(x)+xG(x) \\ G(x)-b_۰ &=& xF(x)+xG(x) \end{array}\right. ,$$

را حل می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{۱-x}{x^۲-۳x+۱}=\frac{۵+\sqrt{۵}}{۱۰}\left(\frac{۱}{\alpha-x}\right)+\frac{۵-\sqrt{۵}}{۱۰}\left(\frac{۱}{\beta-x}\right), \\ G(x) &= \frac{x}{x^۲-۳x+۱}=\frac{-۵-۳\sqrt{۵}}{۱۰}\left(\frac{۱}{\alpha-x}\right)+\frac{-۵+۳\sqrt{۵}}{۱۰}\left(\frac{۱}{\beta-x}\right), \end{aligned}$$

که در آن $\alpha=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$ و $\beta=\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$ هستند. پس جواب دستگاه معادلات بازگشتی برای $n\geq ۰$ به صورت

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{۵+\sqrt{۵}}{۱۰}\left(\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}\right)^{n+۱}+\frac{۵-\sqrt{۵}}{۱۰}\left(\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}\right)^{n+۱} \\ b_n &= \frac{-۵-۳\sqrt{۵}}{۱۰}\left(\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}\right)^{n+۱}+\frac{-۵+۳\sqrt{۵}}{۱۰}\left(\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}\right)^{n+۱} , \end{aligned}$$

است. $\diamondsuit$

از تابع مولد می‌توان برای حل معادله‌های بازگشتی ناهمگن نیز استفاده کرد. به عنوان نمونه به مثال بعدی توجه کنید.

مثال ۴۳.۵ با استفاده از تابع مولد، فرمولی برای جمله عمومی دنباله $\{a_n\}$ که جملات آن در رابطه بازگشتی

$$a_n+۳a_{n-۱}+۲a_{n-۲}=n,$$

برای $n\geq ۲$ صدق می‌کنند و $a_۰=۱$ و $a_۱=۲$ است، پیدا کنید.

حل : تابع مولد دنباله $\{a_n\}$ را با

$$G(x)=a_۰+a_۱x+a_۲x^۲+\cdots ,$$

نشان می‌دهیم. طرفین معادله تفاضلی را در x^n ضرب کرده و برای $n\geq ۲$ با هم جمع می‌کنیم.

$$\sum_{n=۲}^{\infty}a_nx^n+۳\sum_{n=۲}^{\infty}a_{n-۱}x^n+۲\sum_{n=۲}^{\infty}a_{n-۲}x^n=\sum_{n=۲}^{\infty}nx^n,$$

و یا

$$\sum_{n=۲}^{\infty}a_nx^n+۳x\sum_{n=۲}^{\infty}a_{n-۱}x^{n-۱}+۲x^۲\sum_{n=۲}^{\infty}a_{n-۲}x^{n-۲}=x\sum_{n=۲}^{\infty}nx^{n-۱}.$$

با توجه به تعریف تابع مولد، رابطه

$$(G(x)-a_\circ-a_\circ x)+3x(G(x)-a_\circ)+2x^2G(x)=x(2x+3x^2+4x^3+\cdots),$$

برقرار است. با قرار دادن مقادیر اولیه دنباله داریم:

$$\begin{aligned}(1+3x+2x^2)G(x)+(-1-7x) &= x\left(\frac{1}{1-x}-1-x\right)' \\ &= x\left[\left(\frac{1}{1-x}\right)^2-1\right].\end{aligned}$$

بعد از ساده کردن، تابع مولد به صورت زیر است

$$G(x)=\frac{-8x^3+11x^2-3x-1}{(1-x)^3(1-2x)}.$$

تبدیل به کسرهای جزیی و پیدا کردن ضریب x^n به عنوان تمرین واگذار می‌شود. ♢

مثال ۴۴.۵ باستفاده از تابع مولد، فرمولی برای جمله عمومی دنباله $\{a_n\}$ که جملات آن در رابطه بازگشتی

$$a_n+3a_{n-1}+2a_{n-2}=2^n,$$

برای $n\geq 2$ صدق می‌کنند و $a_\circ=1$ و $a_1=1$ هستند، پیدا کنید.

حل : تابع مولد دنباله $\{a_n\}$ را با

$$G(x)=a_\circ+a_1x+a_2x^2+\cdots,$$

نشان می‌دهیم. طرفین معادله تفاضلی را در x^n ضرب کرده و برای $n\geq 2$ با هم جمع می‌کنیم. داریم:

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n+3\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}x^n+2\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n=\sum_{n=2}^{\infty}2^nx^n,$$

و بنابراین

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n+3x\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}+2x^2\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}(2x)^n.$$

بعد از قرار دادن مقادیر $a_\circ$ و a_1 و ساده کردن، تابع مولد به صورت

$$G(x)=\frac{1+2x-4x^2}{(1-x)(1-2x)^2},$$

است. تبدیل به کسرهای جزیی و پیدا کردن ضریب x^n به عنوان تمرین واگذار می‌شود. ♢

تمامی مثال‌هایی که تا به حال بررسی شدند، معادله‌های بازگشتی خطی با ضرایب ثابت بودند. مثال بعدی نشان می‌دهد که اگر ضرایب معادله ثابت نباشند آنگاه استفاده از روش تابع مولد به یک معادله دیفرانسیل منجر می‌شود.

مثال ۴۵.۵ تابع مولد برای دنباله $\{a_n\}$ که جملات آن برای $n \geq 1$ در رابطه بازگشتی

$$na_n + 3a_{n-1} = n,$$

صدق می‌کنند و $a_0 = 1$ است، را بیابید.

حل : تابع مولد دنباله $\{a_n\}$ را با

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots ,$$

نشان می‌دهیم. طرفین معادله تفاضلی را در x^n ضرب کرده و برای $n \geq 1$ با هم جمع می‌کنیم. داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n + 3\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = \sum_{n=2}^{\infty} nx^n,$$

و یا

$$x\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + 3x\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} = x\sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-1}.$$

به عبارت دیگر

$$x\left(G(x) - a_0\right)' + 3xG(x) = x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

با قرار دادن مقدار a_0 و ساده کردن، معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول

$$G'(x) + 3G(x) = \frac{1}{(1-x)^2},$$

به دست می‌آید. حل این معادله دیفرانسیل از حوزه بحث این کتاب خارج است. $\diamondsuit$

تمرین ۴.۵

۱. تابع مولد برای معادله‌های بازگشتی به دست آمده در تمرین‌های بخش ۲.۵ و ۳.۵ را مشخص کنید.

۲. معادله بازگشتی

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 2^n,$$

را برای $n \geq 0$ در نظر بگیرید. با فرض $a_0 = a_1 = 0$، نشان دهید تابع مولد دنباله متناظر $G(x) = \dfrac{x^2}{(1-2x)^3}$ است. با استفاده از روش تفکیک به کسرهای جزیی، جواب معادله بازگشتی را مشخص کنید.

۳. به چند روش می‌توان n ریال را با استفاده از سکه‌های دو، پنج و ده ریالی پرداخت کرد؟ جواب مساله را با استفاده از تابع مولد مشخص کنید.

۴. نشان دهید تابع $F(x) = (1-4x)^{-\frac{1}{2}}$، تابع مولد برای دنباله $a_n = \binom{2n}{n}$ است.

۵. برای عدد طبیعی r، a_r را تعداد آرایه‌های r رقمی که با استفاده از دو رقم صفر و یک ساخته می‌شود و تعداد یک‌ها در آن زوج و تعداد صفرها در آن فرد است، در نظر بگیرید. با استفاده از تابع مولد نمایی a_r را تعیین کنید.

۶. با استفاده از تابع مولد، تعداد دنباله‌های n رقمی که می‌توان با استفاده از ارقام $۰, ۱, ۲, ۳$ ساخت را مشخص کنید.

۷. با استفاده از تابع مولد، تعداد دنباله‌های n رقمی که می‌توان با استفاده از ارقام $۰, ۱, ۲, ۳$ ساخت به طوری که تعداد صفرها در این دنباله‌ها فرد باشد، را مشخص کنید.

۸. با استفاده از تابع مولد جواب این مساله را مشخص کنید. یک مستطیل $n \times ۱$ را به چند روش می‌توان با چهار رنگ، رنگ‌آمیزی کرد به طوری که

(آ) از رنگ خاصی به تعداد زوج استفاده شود.

(ب) تعداد استفاده از رنگ خاصی مضربی از پنج باشد.

(ج) محدودیتی در تعداد رنگ‌های استفاده شده وجود نداشته باشد.

۹. تعداد افرازهای عدد زوج $۲n$ به اعداد زوج را با استفاده از تابع مولد مشخص کنید.

۱۰. با استفاده از تابع مولد، جمله عمومی دنباله $\{a_n\}$ که جملات آن در رابطه بازگشتی

$$a_{n+۲} - ۳a_{n+۱} - ۴a_n = n(n-۱),$$

برای $n \geq ۰$ صدق می‌کنند و $a_۰ = a_۱ = ۱$ هستند، را مشخص کنید.

۱۱. با استفاده از تابع مولد، ضریب x^k را برای $k \geq ۱۸$ در عبارت

$$(x^۳ + x^۴ + x^۵ + \cdots)^۶,$$

بیابید.

۱۲. برای هر عدد طبیعی r، a_r نشان دهنده تعداد روش‌های مختلف قرار دادن r شی متمایز در n جعبه است، طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نیست. با استفاده از تابع مولد نمایی a_r را بیابید.

۱۳. برای هر عدد طبیعی r، a_r را تعداد روش‌های مختلف قرار دادن n شی متمایز در ۴ جعبه متمایز در نظر بگیرید، طوری که جعبه اول یک، جعبه دوم تعداد زوج شی و جعبه سوم تعداد فرد از اشیا را شامل شود. محدودیتی در قرار دادن اشیا در جعبه چهارم وجود ندارد. a_r را با استفاده از تابع مولد نمایی بیابید.

۱۴. تابع مولد معمولی برای رابطه بازگشتی

$$f_{n+۱} = af_n + b^n,$$

با شرط اولیه $f(۰) = c$ داده شده‌است. a، b و c را بیابید.

۱۵. ثابت کنید اگر $g(x)$ تابع مولد توانی برای رابطه بازگشتی

$$f_{n+1} = (n+1)f_n + (-1)^{n+1},$$

باشد که $f(0) = 1$، آنگاه $g(x)$ در معادله دیفرانسیل

$$g'(x) + \frac{x-1}{x^2}g(x) + \frac{1+x}{x^2} = 0,$$

صدق می‌کند. این رابطه بازگشتی را با استفاده از تابع مولد نمایی حل کنید.

۱۶. با استفاده از تابع مولد نمایی، نشان دهید به چند روش می‌توان حروف کلمه PAPAYA را مرتب کرد.

۱۷. تابع مولد برای دنباله c_n با شرط اولیه $c_0 = 0$ و $c_k = \sum_{r=1}^{k} r^2$ را پیدا کنید و نشان دهید

$$\sum_{r=1}^{k} r^2 = \binom{k+1}{3} + \binom{k+2}{3}.$$

۱۸. برای هر عدد طبیعی n؛ فرض کنید:

$$a_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\left[\binom{n}{0} + \cdots + \binom{n}{k}\right]\left[\binom{n}{k+1} + \cdots + \binom{n}{n}\right].$$

فرض کنید $B(x)$ تابع مولد برای دنباله b_k است که در آن

$$b_k = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k}.$$

(آ) نشان دهید

$$a_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{r}(n-r),$$

و تابع مولد برای دنباله a_n را بیابید.

(ب) نشان دهید

$$a_{n-1} = \frac{n}{2}\binom{2n}{n}.$$

۱۹. **اعداد کاتالان** [۶] تعداد n زوج پرانتز داده شده است، فرض کنید C_n تعداد حالت‌های آرایش این n زوج پرانتز است که از نظر ریاضی مجاز است. مثلا برای $n = 3$ ، ۵ آرایش مجاز وجود دارد.

$$((())), (())(), ()(()), (()()), ()()()$$

پس $C_3 = 5$. فرض کنید $C_0 = 1$، ثابت کنید

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!^2}.$$

[۶] Eugène Charles Catalan (1814 – 1894)

۲۰. ثابت کنید اعداد کاتالان در رابطه زیر صدق می‌کنند.

$$C_n = \frac{۱}{n+۱}\sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{i}^{۲}$$

۲۱. نشان دهید اعداد کاتالان در رابطه بازگشتی غیرخطی زیر صدق می‌کنند.

$$C_{۰} = ۱ \quad \text{و} \quad C_{n+۱} = \frac{۲(۲n+۱)}{n+۲}C_n$$

فصل ۶

جبر بول و ساختار داده‌ها

در فصل‌های اول و دوم این کتاب با جبر گزاره‌ها و جبر مجموعه‌ها آشنا شدید. در این فصل، نشان می‌دهیم که قوانین مشترک این دو سیستم به یک ساختار عمومی‌تر به نام **جبر بول** تعلق دارند. جبر بولی یا منطق بولی، در سال ۱۸۴۰ توسط جرج بول[۱] توسعه یافت. این جبر شبیه جبر اعداد حقیقی هست ولی عمل ضرب، جمع و قرینه‌سازی اعداد با اعمال متناظر در جبر بول، یعنی ترکیب عطفی، ترکیب فصلی و نقیض‌سازی جایگرین شده‌اند. قوانین تعریف شده در جبر بول را می‌توان به صورت اصول موضوعه مطرح کرد. در این بخش به طور مختصر با این جبر آشنا شده و کاربردهای ساده‌ای را بیان می‌کنیم.

۱.۶ جبر بول

یک جبر بول شامل یک مجموعه ناتهی $\mathcal{B}$ همراه با سه عمل است که بر این مجموعه تعریف می‌شوند.

۱. عمل دوتایی جمع (یا اجتماع) که با نماد $\oplus$ (یا به طور ساده با $+$) و یا $\cup$ نشان می‌دهیم.

۲. عمل دوتایی ضرب (یا اشتراک) که با نماد $*$ (یا به طور ساده با .) و یا $\cap$ نشان می‌دهیم.

۳. عمل متمم که آن را با نماد «$\bar{\ }$» نشان می‌دهیم و برای هر $b \in \mathcal{B}$، $\bar{b} \in \mathcal{B}$ را متمم b می‌گویند[۲].

مجموعه $\mathcal{B}$ با این سه عمل باید در خاصیت‌های زیر صدق کند.

اصل ۱ (**اعضای همانی**) اعضای متمایزی در $\mathcal{B}$ برای اعمال $\oplus$ و $*$ موجود هستند که آنها را به ترتیب با ۰ و ۱ نشان می‌دهیم. این عضوهای همانی برای هر $b \in \mathcal{B}$ دارای خواص زیر هستند:

$$\begin{aligned} b \oplus ۰ &= ۰ \oplus b = b, \\ b * ۱ &= ۱ * b = b. \end{aligned}$$

[۱] George Boole (1815 – 1864)

[۲] در برخی منابع، متمم b را با b^c نشان می‌دهند.

اصل ۲ **(شرکت پذیری)** عمل‌های جمع و ضرب هر دو شرکت‌پذیر هستند. یعنی برای هر $a, b, c \in \mathcal{B}$ داریم:

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \oplus c &= a \oplus (b \oplus c), \\ (a * b) * c &= a * (b * c).\end{aligned}$$

اصل ۳ **(جابجایی)** عمل‌های جمع و ضرب خاصیت جابجایی دارند. یعنی برای هر $a, b \in \mathcal{B}$ داریم:

$$\begin{aligned}a \oplus b &= b \oplus a, \\ a * b &= b * a.\end{aligned}$$

اصل ۴ **(پخش‌پذیری)** عمل جمع روی عمل ضرب و عمل ضرب روی عمل جمع پخش‌پذیر هستند. یعنی برای هر $a, b, c \in \mathcal{B}$ داریم:

$$\begin{aligned}a \oplus (b * c) &= (a \oplus b) * (a \oplus c), \\ a * (b \oplus c) &= (a * b) \oplus (a * c).\end{aligned}$$

اصل ۵ **(عضو متمم)** برای هر $b \in \mathcal{B}$، عضو $\overline{b}$ در $\mathcal{B}$ وجود دارد به طوری که

$$\begin{aligned}b \oplus \overline{b} &= ۱, \\ b * \overline{b} &= ۰.\end{aligned}$$

جبر بول $\mathcal{B}$، با عمل‌های $^{-}$ ، $*$ ، $\oplus$ و عضوهای همانی ۰ و ۱ را با نماد $(\mathcal{B}, \oplus, *, ^{-}, ۰, ۱)$ نشان می‌دهند.

نکته:

ممکن است اصل ۵ این مفهوم را تداعی کند که $\overline{b}$ همان معکوس b است، در حالی که چنین نیست. به خاطر بیاورید که اگر $b^{-۱}$ معکوس b باشد آنگاه $b * b^{-۱}$ همان عضو همانی عمل $*$ است. در حالی که در جبر بول، $b \oplus \overline{b}$ مساوی عضو همانی عمل $*$ و $b * \overline{b}$ مساوی عضو همانی در عمل $\oplus$ است. پس

$\overline{b}$ معکوس b نسبت به دو عمل $\oplus$ و $*$ نیست.

در ادامه چند مثال ساده را برای روشن‌تر شدن مفهوم جبر بول بیان می‌کنیم.

مثال ۱.۶ ساده‌ترین جبر بول به صورت زیر تعریف می‌شود. فرض کنید $\mathcal{B} = \{۰, ۱\}$ و عمل‌های جمع، ضرب و متمم با جدول‌های زیر تعریف می‌شوند:

$\oplus$	۰	۱
۰	۰	۱
۱	۱	۱

$*$	۰	۱
۰	۰	۰
۱	۰	۱

b	$\overline{b}$
۰	۱
۱	۰

تحقیق برقراری اصول ۱ ــ ۵ را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم.

مثال ۲.۶ فرض کنید S یک مجموعه ناتهی و $\mathcal{P}(S)$ مجموعه توان S باشد. عمل‌های اجتماع $\cup$ ، اشتراک $\cap$ و متمم‌گیری مجموعه‌ها را به ترتیب به جای عمل‌های $*$ ، $\oplus$ و $^{-}$ در نظر بگیرید. متمم مجموعه A در S عبارت است از $\overline{A} = S - A$ و عضوهای همانی عمل‌های جمع و ضرب به ترتیب مجموعه‌های $\emptyset$ و S هستند. تحقیق برقراری اصول جبر بول آسان است و به عنوان تمرین واگذار می‌شود.

مثال ۳.۶ فرض کنید $\mathcal{B}$ مجموعه تمامی گزاره‌ها هست که نسبت به عمل‌های ترکیب فصلی، ترکیب عطفی و نقیض بسته است و مساوی بودن گزاره‌ها به مفهوم معادل بودن ارزش آنها است. گزاره همیشه نادرست را با F (معادل با عضو همانی عمل جمع ــ ترکیب فصلی) و گزاره همیشه درست را با T (معادل با عضو همانی عمل ضرب ــ ترکیب عطفی) در نظر بگیرید. تحقیق برقراری اصول ۱ــ۵ به عنوان تمرین واگذار می‌شود.

در ادامه بخش، خواصی از جبر بول را ثابت می‌کنیم. ابتدا مفهوم دوگانی را بیان می‌کنیم.

اصل دوگانی در جبر بول:

فرض کنید گزاره‌ای از جبر بول داده شده است. منظور از دوگان این گزاره، گزاره‌ای است که با جایگذاری $*$ به جای $\oplus$، $\oplus$ به جای $*$، صفر به جای یک، و یک به جای صفر به دست می‌آید. برای هر قضیه در جبر بول، دوگان آن نیز یک قضیه است.

مثال ۴.۶ برای $a, b \in \mathcal{B}$، دو گزاره زیر دوگان یکدیگر هستند:

$$\begin{aligned}(a \oplus b) * a * \overline{b} &= ۱,\\ (a * b) \oplus a \oplus \overline{b} &= ۰.\end{aligned}$$

با کمی دقت در اصول ۱ــ۵، ملاحظه می‌شود که روابط داده شده در این اصول دوگان همدیگر هستند. مهم‌ترین اصلی که در بیان خواص جبر بول به کار می‌رود، اصل دوگانی است.

در تمامی قضیه‌های این بخش، برهان برای یک حالت از قضیه ارائه می‌شود و با استفاده از اصل دوگانی، درستی رابطه دیگر نتیجه می‌شود.

قضیه ۱.۶ *عضوهای همانی ۱ و ۰ منحصر به فرد هستند.*

برهان: فرض کنید ۰ و $۰'$ دو عضو همانی مجموعه $\mathcal{B}$ نسبت به عمل جمع هستند. آنگاه بنا بر اصل ۱ ، داریم:

$$۰ \oplus ۰' = ۰' \oplus ۰ = ۰$$

همچنین:

$$۰' \oplus ۰ = ۰ \oplus ۰' = ۰'$$

پس $۰ = ۰'$.

قضیه ۲.۶ *متمم هر عضو در جبر بول منحصر به فرد است.*

برهان: فرض کنید $b \in \mathcal{B}$ و $\overline{b}_۱$ و $\overline{b}_۲$ دو متمم b هستند. یعنی

$$\begin{aligned}b \oplus \overline{b}_۱ &= \overline{b}_۱ \oplus b = ۱, & b \oplus \overline{b}_۲ &= \overline{b}_۲ \oplus b = ۱,\\ b * \overline{b}_۱ &= \overline{b}_۱ * b = ۰, & b * \overline{b}_۲ &= \overline{b}_۲ * b = ۰.\end{aligned}$$

پس داریم:

$$
\begin{aligned}
\bar{b}_1 &= \bar{b}_1 * 1 && \text{بنا بر اصل ۱}\\
&= \bar{b}_1 * (b \oplus \bar{b}_2) && \text{بنا بر فرض قضیه}\\
&= (\bar{b}_1 * b) \oplus (\bar{b}_1 * \bar{b}_2) && \text{بنا بر اصل ۴}\\
&= 0 \oplus (\bar{b}_1 * \bar{b}_2) && \text{بنا بر فرض قضیه}\\
&= 0 \oplus (\bar{b}_2 * \bar{b}_1) && \text{بنا بر اصل ۳}\\
&= (\bar{b}_2 * b) \oplus (\bar{b}_2 * \bar{b}_1) && \text{بنا بر فرض قضیه}\\
&= \bar{b}_2 * (b \oplus \bar{b}_1) && \text{بنا بر اصل ۴}\\
&= \bar{b}_2 * 1 && \text{بنا بر فرض قضیه}\\
&= \bar{b}_2.
\end{aligned}
$$

به این ترتیب حکم ثابت می‌شود.

قضیه ۳.۶ *(قاعده خودتوان) برای هر $b \in \mathcal{B}$ داریم:*

$$b \oplus b = b, \qquad b * b = b.$$

برهان: برای هر $b \in \mathcal{B}$ داریم:

$$
\begin{aligned}
b &= b \oplus 0 && \text{بنا بر اصل ۱}\\
&= b \oplus (b * \bar{b}) && \text{بنا بر اصل ۵}\\
&= (b \oplus b) * (b * \bar{b}) && \text{بنا بر اصل ۴}\\
&= (b \oplus b) * 1 && \text{بنا بر اصل ۵}\\
&= b \oplus b.
\end{aligned}
$$

به این ترتیب حکم ثابت می‌شود.

قضیه بعدی در خصوص عضوهای همانی عمل‌های جمع و ضرب در جبر بول صحبت می‌کند. اثبات آن به عنوان تمرین واگذار می‌شود.

قضیه ۴.۶ *(قاعده عضو همانی) برای هر $b \in \mathcal{B}$ داریم:*

$$1 \oplus b = b \oplus 1 = 1, \qquad 0 * b = b * 0 = 0$$

قضیه ۵.۶ *(قاعده جذب) برای هر $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$ داریم:*

$$b_1 \oplus (b_1 * b_2) = b_1, \qquad b_1 * (b_1 \oplus b_2) = b_1.$$

برهان: برای هر $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$ داریم:

$$
\begin{aligned}
b_1 \oplus (b_1 * b_2) &= (b_1 * 1) \oplus (b_1 * b_2) && \text{بنا بر اصل ۱}\\
&= b_1 * (1 \oplus \bar{b}_2) && \text{بنا بر اصل ۴}\\
&= b_1 * 1 && \text{بنا بر قضیه ۴.۶}\\
&= b_1. && \text{بنا بر اصل ۱}
\end{aligned}
$$

به این ترتیب حکم ثابت می‌شود.

قضیه ۶.۶ (*قاعده متمم مرکب*) *برای هر* $b \in \mathcal{B}$، $\bar{\bar{b}} = b$.

برهان: از $\bar{b} \oplus \bar{\bar{b}} = \bar{\bar{b}} \oplus \bar{b} = 1$ و $\bar{b} * \bar{\bar{b}} = \bar{\bar{b}} * \bar{b} = 0$ نتیجه می‌گیریم که $\bar{\bar{b}}$ متمم $\bar{b}$ است. بنا بر قضیه ۲.۶، عضو متمم منحصر به فرد است. پس $\bar{\bar{b}} = b$.

قضیه ۷.۶ (*قواعد دمورگان*) *برای هر* $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$ *داریم:*

$$\overline{b_1 \oplus b_2} = \bar{b}_1 * \bar{b}_2, \quad \overline{b_1 * b_2} = \bar{b}_1 \oplus \bar{b}_2.$$

برهان:

$$\begin{aligned}
(b_1 \oplus b_2) \oplus (\bar{b}_1 * \bar{b}_2) &= [(b_1 \oplus b_2) \oplus \bar{b}_1] * [(b_1 \oplus b_2) \oplus \bar{b}_2] && \text{بنا بر اصل ۴}\\
&= [\bar{b}_1 \oplus (b_1 \oplus b_2)] * [(b_1 \oplus b_2) \oplus \bar{b}_2] && \text{بنا بر اصل ۳}\\
&= [(\bar{b}_1 \oplus b_1) \oplus b_2] * [b_1 \oplus (b_2 \oplus \bar{b}_2)] && \text{بنا بر اصل ۲}\\
&= (1 \oplus b_2) * (1 \oplus \bar{b}_2) && \text{بنا بر اصل ۵}\\
&= 1 * 1 && \text{بنا بر قضیه ۴.۶}\\
&= 1 && \text{بنا بر اصل ۱}
\end{aligned}$$

به این ترتیب ثابت کردیم $(b_1 \oplus b_2) \oplus (\bar{b}_1 * \bar{b}_2) = 1$. به روش مشابه ثابت می‌شود

$$(b_1 \oplus b_2) * (\bar{b}_1 * \bar{b}_2) = 0.$$

یعنی $\bar{b}_1 * \bar{b}_2$ متمم $b_1 \oplus b_2$ است و حکم ثابت می‌شود.
برهان قضیه بعدی ساده است و به عنوان تمرین واگذار می‌شود.

قضیه ۸.۶ $\bar{0} = 1$ و $\bar{1} = 0$.

تمرین ۱.۶

۱. فرض کنید $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ مجموعه مقسوم‌علیه‌های عدد ۳۰ است. عمل‌های $\oplus$ و $*$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
b_1 \oplus b_2 &= (b_1, b_2) && \text{کوچک‌ترین مضرب مشترک}\\
b_1 * b_2 &= [b_1, b_2] && \text{بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک}\\
\bar{b} &= \frac{30}{b}.
\end{aligned}$$

ثابت کنید مجموعه $\mathcal{B}$ با عمل‌های تعریف شده فوق‌الذکر یک جبر بول است.

۲. فرض کنید $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ مجموعه مقسوم‌علیه‌های عدد ۲۴ است. عمل‌های جمع و ضرب را مانند تمرین قبلی تعریف کرده و عمل متمم را به صورت $\bar{b} = \dfrac{24}{b}$ در نظر بگیرید. آیا مجموعه $\mathcal{B}$ با عمل‌های تعریف شده یک جبر بول است؟ چرا؟

۳. نشان دهید خاصیت شرکت‌پذیری در جبر بول را می‌توان از سایر خواص نتیجه گرفت.

۴. برای جبر بول $(\mathcal{B}, \oplus, *, ^{-}, 0, 1)$، ثابت کنید به ازای هر $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$ روابط زیر برقرار هستند:

(آ) $(b_1 \oplus b_2) * \bar{b}_1 * \bar{b}_2 = 0$.

(ب) $b_1 \oplus [\overline{(\bar{b}_1 \oplus b_1) * b_2}] = 1$.

(ج) $(b_1 \oplus b_2) * (\bar{b}_1 \oplus \bar{b}_2) = (b_1 * \bar{b}_2) \oplus (\bar{b}_1 * b_2)$.

(د) $b_1 * (\bar{b}_1 \oplus b_2) = b_1 * b_2$.

(ه) $\forall b_3 \in \mathcal{B}, \ \ (b_1 \oplus b_2 \oplus b_3) * (b_1 \oplus b_2) = b_1 \oplus b_2$.

(و) $(b_1 \oplus b_2) * (b_1 \oplus \bar{b}_2) = b_1$.

(ز) $b_1 \oplus [b_1 * (b_2 * 1)] = b_1$.

۵. ثابت کنید در هر جبر بول $b_1 * \bar{b}_2 = 0$ اگر و فقط اگر $b_1 * b_2 = b_1$.

۶. (قاعده حذف) ثابت کنید اگر

$$\begin{aligned} b_1 * b_2 &= b_1 * b_3 \\ b_1 \oplus b_2 &= b_1 \oplus b_3, \end{aligned}$$

آنگاه $b_2 = b_3$.

۷. رابطه $\mathcal{R}$ روی مجموعه $\mathcal{B}$ از جبر بول $(\mathcal{B}, \oplus, *, ^{-}, 0, 1)$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$b_1 \mathcal{R} b_2 \Leftrightarrow b_1 * b_2 = b_2.$$

(آ) نشان دهید $\mathcal{R}$ یک رابطه ترتیبی است.

(ب) نشان دهید $b_1 * b_2 = b_1$ اگر و فقط اگر $b_1 \oplus b_2 = b_2$.

۲.۶ توابع بولی

با متغیرها و توابع حقیقی آشنایی دارید. در این بخش متغیرها و توابع بولی را تعریف کرده و خواص آنها را بررسی می‌کنیم.

فرض کنید جبر بول $(\mathcal{B}, \oplus, *, ^{-}, 0, 1)$ داده شده‌است.

۱. متغیر بولی متغیری است که می‌توان عضوی از مجموعه $\mathcal{B}$ را به آن نسبت داد.

۲. فرض کنید متغیر بولی x داده شده است. متمم متغیر x را با $\bar{x}$ نشان می‌دهند و متغیری است که اگر $x = b \in \mathcal{B}$، آنگاه $\bar{x} = \bar{b}$.

۳. عبارت **یک‌حرفی** بول یک متغیر بولی x و یا متمم آن $\bar{x}$ است.

نماد مفیدی برای نشان دادن یک عبارت یک‌حرفی متمایز بولی، نوشتن x^1 برای x و x^0 برای $\bar{x}$ است. در این صورت، عبارت یک‌حرفی بولی را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$x^e = \begin{cases} \bar{x} & \text{اگر } e = 0 \\ x & \text{اگر } e = 1 \end{cases}$$

در جبر بول $(\mathcal{B}, \oplus, *, ^{-}, 0, 1)$،

۱. عضوهای همانی ۰ و ۱ عبارت بولی هستند.

۲. متغیرهای بولی $x_1, x_2, \ldots, x_n$ عبارت بولی هستند.

۳. اگر x و y عبارت بولی باشند، آنگاه $x \oplus y$، $x * y$ و $\bar{x}$ نیز عبارت‌های بولی هستند.

از این پس برای سادگی در نوشتن، به جای علامت $\oplus$ از نماد + استفاده می‌کنیم و از نوشتن نماد $*$ صرف نظر می‌کنیم. مثلاً x_1x_2 را به جای $x_1 * x_2$ و $x_1(x_2 + x_3)$ را به جای $x_1 * (x_2 \oplus x_3)$ به کار می‌بریم.

دو عبارت جبری بولی را **معادل** (یا مساوی) گویند، هرگاه بتوان با به کار بردن تعداد متناهی از اصول جبر بول و قضیه‌های مربوطه روی یکی از عبارت‌ها، عبارت دیگر را نتیجه گرفت و یا با انجام اصول و قضیه‌ها روی هر دو عبارت، نتیجه یکسان به دست آورد. یک **تابع بولی** از n متغیر بولی $x_1, x_2, \ldots, x_n$، تابعی مانند $f : \mathcal{B}^n :\to \mathcal{B}$ است که در آن $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ یک عبارت بولی است.

مثال ۵.۶ تابع‌های f و g تعریف شده به صورت

$$f : \mathcal{B}^2 \to \mathcal{B} \qquad\qquad g : \mathcal{B}^2 \to \mathcal{B}$$
$$f(x_1, x_2) = x_1(\bar{x}_1 + x_2) \qquad\qquad g(x_1, x_2) = x_1x_2,$$

را در نظر بگیرید. به سادگی ملاحظه می‌شود که $x_1(\bar{x}_1 + x_2) = x_1x_2$. بنابراین دو تابع f و g مساوی هستند. $\diamondsuit$

چون یک عبارت بولی خاص ممکن است چندین عبارت معادل داشته باشد، طبیعتاً این سوال پیش می‌آید که «چگونه می‌توان معادل بودن دو عبارت بولی را نتیجه گرفت؟» البته استفاده از اصول و قضیه‌ها مفید است ولی زمان زیادی لازم دارد و در بعضی موارد، به دست آوردن یک عبارت از روی عبارت دیگر، عملاً امکان‌پذیر نیست؛ زیرا استفاده صحیح و مناسب از قوانین، خود امری مهم است. برای اجتناب از تحقیق مستقیم، روش ساده‌تری وجود دارد. برای شروع کار به چند تعریف نیازمندیم.

تعریف ۱ : یک **جمله ضربی کامل** از $x_1, x_2, \ldots, x_n$ یک عبارت بولی است که به صورت حاصل‌ضربی از این متغیرها و یا متمم آنها بیان می‌شود. پس هر جمله ضربی کامل، حاصل‌ضربی از n عبارت یک‌حرفی بولی است.

مثال ۶.۶ برای سه متغیر بولی x_1، x_2 و x_3 ، هشت جمله ضربی کامل به صورت زیر وجود دارد:

$$\begin{array}{cccc} x_1x_2x_3 & x_1x_2\bar{x}_3 & x_1\bar{x}_2x_3 & x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \\ \bar{x}_1x_2x_3 & \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 & \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 & \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \end{array}$$

با استفاده از نماد x^e ، جمله ضربی کامل از n متغیر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ را می‌توان به صورت

$$m_{e_1, e_2, \ldots, e_n} = x_1^{e_1} x_2^{e_2} \ldots x_n^{e_n}$$

نشان داد که در آن

$$e_i = 0 \text{ یا } 1, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

به عنوان مثال:

$$\begin{aligned} m_{۱۰۱۱۰} &= x_۱^۱ x_۲^۰ x_۳^۱ x_۴^۱ x_۵^۰ = x_۱ \bar{x}_۲ x_۳ x_۴ \bar{x}_۵ \\ m_{۰۱۱۱} &= x_۱^۰ x_۲^۱ x_۳^۱ x_۴^۱ = \bar{x}_۱ x_۲ x_۳ x_۴. \end{aligned}$$

تعداد جملات یک جمله ضربی کامل با n متغیر ۲^n است که هیچ‌کدام با دیگری معادل نیست. این واقعیت را می‌توان با جایگذاری مناسب ۰ و ۱ به جای متغیرها تحقیق کرد.

قضیه ۹.۶ *تعداد جمله‌های ضربی کامل برای n متغیر $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$، ۲^n است که هیچ دو جمله ضربی کامل با هم معادل نیستند.*

برهان: ابتدا یادآوری می‌کنیم که $۱ = \bar{۰} = ۰^۰$. پس اگر $x_i = e_i$، آنگاه $x_i^{e_i} = ۱$. برای جمله ضربی کامل m داریم:

$$m = m_{e_۱, e_۲, \ldots, e_n} = x_۱^{e_۱} x_۲^{e_۲} \ldots x_n^{e_n}$$

با جایگذاری $x_i = e_i$ و $۱ \leq i \leq n$، حاصل‌ضرب n جمله که تمامی جملات آن ۱ است محاسبه شده است و مقدار این حاصل ضرب ۱ است.
حال برای هر جمله ضربی کامل دیگر، حداقل به جای یکی از عبارت‌های یک‌حرفی بولی، متمم آن قرار دارد و لذا در این حاصل ضرب، حداقل یکی از عوامل حاصل ضرب صفر است. به این ترتیب، نشان دادیم که برای هر دو جمله ضربی کامل، حداقل یک مجموعه از مقادیر برای متغیرها وجود دارد، طوری که جمله‌های ضربی کامل متفاوت داشته باشند. پس هیچ دو جمله ضربی کامل متمایز معادل نیستند.

تعریف ۲ : یک **جمله جمعی کامل** از n متغیر $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$، یک عبارت بولی است که از جمع کردن متغیرهای بولی یا متمم آنها به دست می‌آید.

یک جمله جمعی کامل از n متغیر $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ را با

$$M_{e_۱, e_۲, \ldots, e_n} = x_۱^{e_۱} + x_۲^{e_۲} + \cdots + x_n^{e_n}$$

نشان می‌دهند. به عنوان مثال،

$$\begin{aligned} M_{۱۱۰۱۰} &= x_۱^۱ + x_۲^۱ + x_۳^۰ + x_۴^۱ + x_۵^۰ = x_۱ + x_۲ + \bar{x}_۳ + x_۴ + \bar{x}_۵ \\ M_{۰۰۱۱} &= x_۱^۰ + x_۲^۰ + x_۳^۱ + x_۴^۱ = \bar{x}_۱ + \bar{x}_۲ + x_۳ + x_۴. \end{aligned}$$

تعداد عبارت‌های جمعی کامل، ۲^n است و هیچ کدام از دو عبارت جمعی کامل با هم معادل نیستند. این موضوع را می‌توان با استفاده از اصل دوگان و قضیه ۹.۶ نتیجه گرفت.

تعریف ۳ : اگر یک تابع بولی به صورت مجموع چند عبارت ضربی کامل نوشته شود، آن را **شکل اساسی مجموع ضرب‌ها** می‌گویند.

در مثال بعدی نمونه‌ای از یک تابع که به صورت «شکل اساسی مجموع ضرب‌ها» نوشته شده است را مشاهده می‌کنید.

مثال ۷.۶ برای نوشتن عبارت $x_1x_2(x_1+x_3)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$\begin{array}{rcll} x_1x_2(x_1+x_3) & = & x_1x_2x_1+x_1x_2x_3 & \text{بنا بر اصل ۴} \\ & = & x_1x_1x_2+x_1x_2x_3 & \text{بنا بر اصل ۳} \\ & = & x_1x_2+x_1x_2x_3 & \text{بنا بر قاعده خودتوان} \\ & = & x_1x_2\,1+x_1x_2x_3 & \text{بنا بر اصل ۱} \\ & = & x_1x_2(x_3+\bar{x}_3)+x_1x_2x_3 & \text{بنا بر اصل ۵} \\ & = & x_1x_2x_3+x_1x_2\bar{x}_3+x_1x_2x_3 & \text{بنا بر اصل ۴} \\ & = & x_1x_2\bar{x}_3+x_1x_2x_3 & \text{بنا بر قاعده خودتوان} \end{array}$$

◇

قضیه بعدی را برای نوشتن شکل اساسی مجموع از ضرب‌ها بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه ۱۰.۶ *هر تابع $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ که صفر نباشد را می‌توان به شکل مجموعی از ضرب‌های*

$$f(e_1,e_2,\ldots,e_n)x_1^{e_1}x_2^{e_2}\ldots x_n^{e_n}$$

به صورت زیر نوشت:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{(e)} f(e_1,e_2,\ldots,e_n)\,x_1^{e_1}x_2^{e_2}\ldots x_n^{e_n}$$

که در آن $(e)=(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ و $1\le i\le n$ و $e_i=0$ یا ۱.

مثال ۸.۶ شکل اساسی مجموعی از ضرب‌ها را برای $f(x_1,x_2)=x_1+x_2$ بنویسید.

حل : برای تابع f داریم:

e_1	e_2	$f(e_1,e_2)$
۰	۰	۰
۰	۱	۱
۱	۰	۱
۱	۱	۱

پس

$$\begin{array}{rcl} f(x_1,x_2) & = & 0\bar{x}_1\bar{x}_2+1\bar{x}_1x_2+1x_1\bar{x}_2+1x_1x_2 \\ & = & \bar{x}_1x_2+x_1\bar{x}_2+x_1x_2. \end{array}$$

◇

مثال ۹.۶ تابع $f(x_1,x_2,x_3)=x_2x_3+x_3x_1$ را به شکل اساسی مجموعی از ضرب‌ها بنویسید.

حل : با استفاده از جدول زیر، مقادیر مختلف تابع f را محاسبه می‌کنیم.

e_1	e_2	e_3	e_2e_3	e_3e_1	$e_2e_3+e_3e_1$
۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۰	۰	۰
۰	۱	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۰	۰	۱
۱	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۰	۱	۱
۱	۱	۰	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱

بنابراین
$$f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1x_2x_3+x_1\bar{x}_2x_3+x_1x_2x_3.$$

$\diamondsuit$

قضیه ۱۱.۶ (*بدون اثبات*) *شکل اساسی مجموعی از ضرب‌ها برای یک تابع بولی منحصر به فرد است.*

نتیجه ۱۶ *با توجه به قضیه ۱۱.۶، برای نشان دادن تساوی دو تابع بولی، کافی است آنها را به شکل اساسی مجموعی از ضرب‌ها بنویسیم. در صورتی که این دو شکل برای هر دو تابع یکسان باشند، آن دو تابع معادل هستند.*

مثال ۱۰.۶ نشان دهید دو تابع $f(x_1,x_2)=x_1+x_2$ و $g(x_1,x_2)=\bar{x}_1x_2+x_1$ معادل هستند.

حل : داریم؛ $f(x_1,x_2)=\bar{x}_1x_2+x_1\bar{x}_2+x_1x_2=g(x_1,x_2)$ (مثال ۸.۶ را ببینید). $\diamondsuit$

مثال ۱۱.۶ تابع بولی f چنان است که
$$f(0,0)=1,\quad f(0,1)=0,\quad ,f(1,0)=1,\quad f(1,1)=0.$$
ضابطه تابع f را مشخص کنید.

حل : مطابق تعریف شکل اساسی مجموعی از ضرب‌ها داریم:
$$f(x_1,x_2)=\bar{x}_1\bar{x}_2+x_1\bar{x}_2.$$

$\diamondsuit$

با توجه به اصل دوگان، تمامی موارد گفته شده در مورد عبارت‌های ضربی‌های کامل و شکل اساسی مجموعی از ضرب‌ها، در مورد عبارت‌های جمعی کامل و شکل اساسی ضرب‌هایی از جمع‌ها برقرار است. به عنوان مثال، تابع زیر یک شکل اساسی ضربی از جمع‌ها است:
$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+\bar{x}_3)(x_1+\bar{x}_2+x_3)(\bar{x}_1+x_2+x_3).$$
مجدداً، دو تابع بولی معادل هستند اگر و تنها اگر شکل اساسی ضرب‌هایی از جمع‌های آنها یکسان باشند.

تمرین ۲.۶

۱. تابع‌های زیر را به شکل اساسی مجموعی از ضرب‌ها بنویسید.

(آ) $f(x_1, x_2) = \bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2$.

(ب) $f(x_1, x_2) = x_1$.

(ج) $f(x_1, x_2) = x_1(\bar{x}_2 + x_1)$.

(د) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + \bar{x}_3 + x_1$.

(ه) $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 + x_1 x_3$.

۲. فرض کنید $(\mathcal{B}, \oplus, *, ^-, 0, 1)$ یک جبر بول است. عمل $\odot$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$b_1 \odot b_2 = b_1 \bar{b}_2 \oplus \bar{b}_1 b_2.$$

نشان دهید $(\mathcal{B}, \odot)$ یک گروه جابجایی با عضو خنثی صفر است.

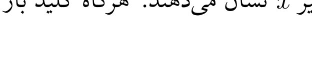
۳. جبر بول $(\mathcal{B}, \oplus, *, ^-, 0, 1)$ را در نظر بگیرید. عضو غیرصفر $a \in \mathcal{B}$ را یک **اتم** گویند هرگاه برای هر $b \in \mathcal{B}$ داشته باشیم $ba = a$ یا $ba = 0$.

(آ) فرض کنید $S = \{1, 2, 3, 4\}$. در جبر بول $(\mathcal{B} = \mathcal{P}(S), \cup, \cap, ^-, \varnothing, S)$ اتم‌ها را مشخص کنید.

(ب) ثابت کنید اگر a_1 و a_2 دو اتم از جبر بول $(\mathcal{B}, \oplus, *, ^-, 0, 1)$ باشند و $a_1 a_2 \neq 0$، آنگاه $a_1 = a_2$.

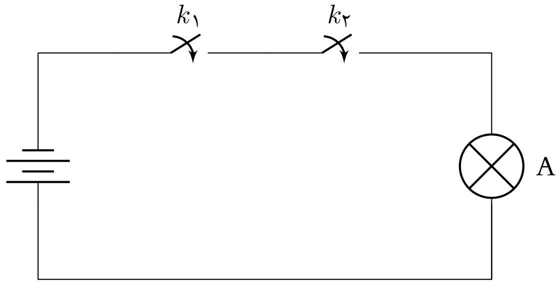
۳.۶ جبر کلیدی و مدارهای منطقی

بسیاری از ابزارهای الکترونیکی نظیر رایانه، سیستم‌های تلفن، سیستم‌های کنترل ترافیک و راه‌آهن در مدارهای خود از ابزارهایی استفاده می‌کنند که **کلید** نام دارند. یک کلید در مسیر ارتباطی یک مدار قرار می‌گیرد. وقتی کلید بسته است، جریان الکتریکی می‌تواند از مدار عبور کند. ولی وقتی کلید **باز** است؛ هیچ جریانی از مدار عبور نمی‌کند. یک کلید از این نوع را **کلید دو وضعیتی** گویند. مداری که شامل یک یا چند کلید است، **مدار کلیدی** نامیده می‌شود. یک کلید در مدار به صورت زیر نمایش داده می‌شود.



فرض کنید مداری داریم که به یک منبع انرژی مناسب متصل است و این مدار شامل کلیدی مانند k است. وضعیت کلید را با متغیر x نشان می‌دهند. هرگاه کلید باز باشد، $x = 0$ و اگر بسته باشد $x = 1$.

تعریف ۴ : فرض کنید مداری شامل دو کلید k_1 و k_2 است که به صورت



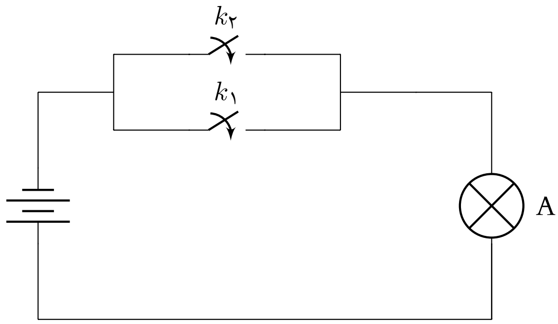
به هم متصل هستند. کلیدهایی که به این صورت به هم متصل می‌شوند **سری** نامیده می‌شوند.

واضح است که در چنین مداری، جریان تنها زمانی وجود دارد که هر دو کلید بسته باشند. فرض کنید x_1 و x_2 به ترتیب نشان دهنده وضعیت کلیدهای k_1 و k_2 هستند. در هر حالت، صفر به منزله باز بودن و ۱ به منزله بسته بودن کلید است. همچنین فرض کنید $f(x_1, x_2)$ تابعی است که برای مقداری از x_1 و x_2 که جریانی در مدار وجود دارد، مقدارش ۱ و برای بقیه حالت‌ها صفر است. پس $f := \{0, 1\}^2 \to \{0, 1\}$ و مقادیر تابع $f(x_1, x_2)$ برای تمامی مقادیر ممکن x_1 و x_2 در جدول بعدی آمده است.

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
۰	۰	۰
۰	۱	۰
۱	۰	۰
۱	۱	۱

ملاحظه می‌شود که f همان تابع $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ است و x_1 و x_2 متغیرهایی در جبر بول $(\{0, 1\}, \oplus, *, ^-, 0, 1)$ هستند.

تعریف ۵ : مداری که دو کلید به صورت زیر دارد را مدار **موازی** می‌نامند.



برای وجود جریان در یک مدار موازی، لازم است دست‌کم یکی از کلیدها بسته باشد. x_1 و x_2 را همانند قبل در نظر گرفته و تابع $g(x_1, x_2)$ را مطابق جدول بعدی برای مدار موازی تعریف می‌کنیم.

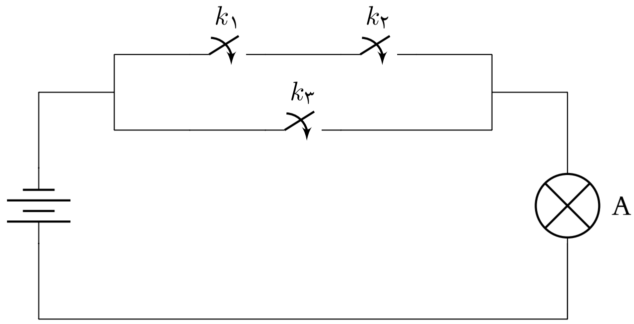
x_1	x_2	$g(x_1, x_2)$
۰	۰	۰
۰	۱	۱
۱	۰	۱
۱	۱	۱

بنابراین $g(x_{۱}, x_{۲}) = x_{۱} + x_{۲}$.

تابعی مانند آنچه گفته شد، وضعیت وجود جریان در یک مدار الکتریکی را بر حسب وضعیت کلیدهای موجود در مدار توصیف می‌کنند، **تابع کلیدی** می‌نامند. n کلید $k_{۱}, k_{۲}, \dots, k_n$ داده شده‌اند. وضعیت آنها به ترتیب با n متغیر $x_{۱}, x_{۲}, \dots, x_n$ تعریف می‌شوند که در آن $x_i = ۰$ یا $x_i = ۱$ و $۱ \leq i \leq n$.

یک تابع کلیدی $f : \{۰, ۱\}^n \to \{۰, ۱\}$ رفتار مدار را برای تمامی ۲^n حالت مختلف کلیدی بیان می‌کند. همچنان که دیدیم، f به صورت یک عبارت بولی بیان می‌شود. پس هر تابع کلیدی یک تابع بولی است.

مثال ۱۲.۶ تابع کلیدی برای برای مدار زیر تعریف کنید.

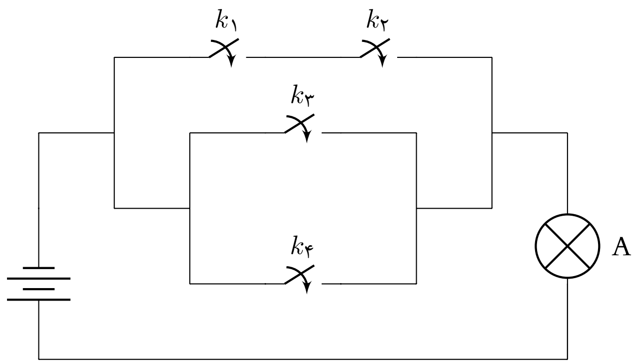


حل : فرض کنید $x_{۱}$، $x_{۲}$ و $x_{۳}$ به ترتیب نشان دهنده وضعیت کلیدهای $k_{۱}$، $k_{۲}$ و $k_{۳}$ هستند و رفتار قسمتی از مدار شامل کلیدهای $k_{۱}$ و $k_{۲}$ را با $f_{۱}(x_{۱}, x_{۲})$ و رفتار قسمتی دیگر از مدار که شامل کلید $k_{۳}$ است با $f_{۲}(x_{۳})$ نشان دهیم، در این صورت

$$f_{۱}(x_{۱}, x_{۲}) = x_{۱}x_{۲}, \quad f_{۲}(x_{۳}) = x_{۳}.$$

پس $f(x_{۱}, x_{۲}, x_{۳}) = f_{۱}(x_{۱}, x_{۲}) + f_{۲}(x_{۳}) = x_{۱}x_{۲} + x_{۳}$ که در آن $f(x_{۱}, x_{۲}, x_{۳})$ نشان دهنده وضعیت کل مدار است. $\diamondsuit$

مثال ۱۳.۶ تابع کلیدی متناظر برای مدار زیر را بنویسید.

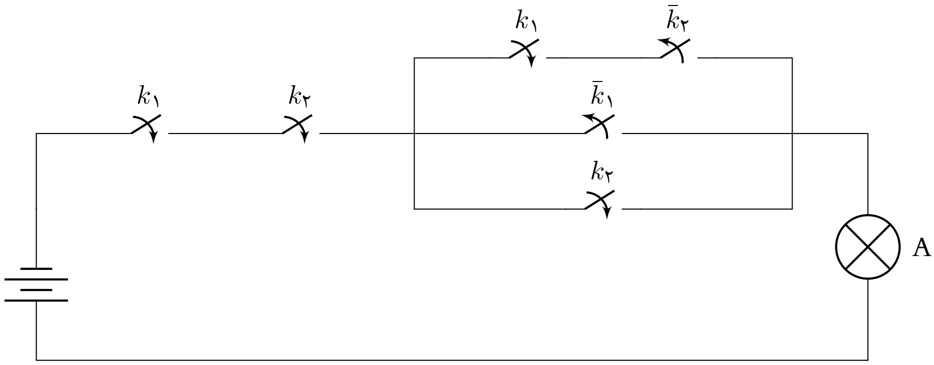


حل : تابع متناظر $f(x_{۱}, x_{۲}, x_{۳}, x_{۴}) = x_{۱}x_{۲} + x_{۳} + x_{۴}$ است. $\diamondsuit$

مثال ۱۴.۶ در مثال قبلی، فرض کنید کلیدهای k_1 و k_3 چنان تنظیم شده‌اند که همزمان باز یا بسته می‌شوند و نیز کلیدهای k_2 و k_4 چنان تنظیم شده‌اند که وقتی کلید k_1 باز است کلید k_4 بسته است و برعکس. تابع کلیدی متناظر را بنویسید.

حل : داریم: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_1 + \bar{x}_2$. $\diamondsuit$

قبلاً مشاهده کردیم که تابع بولی را می‌توان به شکل‌های معادل دیگری نوشت. این امر با توابع کلیدی به این مفهوم است که ممکن است که دو ترتیب مختلف قرار دان کلیدها در مدارها با هم معادل باشند. این امر موجب می‌شود تا رفتار دو مدار در وضعیت خاصی از کلیدها، کاملا یکسان باشد. به عنوان مثال مدار زیر را در نظر بگیرید:



فرض کنید x_1 و x_2 به ترتیب نشان دهنده وضعیت کلیدهای k_1 و k_2 بوده و تابع $f_1(x_1, x_2)$ وضعیت این مدار را نشان دهد. داریم: $f_1(x_1, x_2) = x_1x_2(x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1 + x_2)$. یادآوری می‌کنیم که تابع کلیدی متناظر با مدار کلیدهای سری به صورت $f_2(x_1, x_2) = x_1x_2$ است. دو تابع f_1 و f_2 با هم مساوی هستند (چرا). پس مدار فوق‌الذکر و مدار کلیدی موازی با هم معادل هستند.

مثال ۱۵.۶ (**کلید تبدیل**) یک چراغ با دو کلید داده شده است. می‌خواهیم مداری را طراحی کنیم که این چراغ با هر دو کلید روشن و خاموش شود.

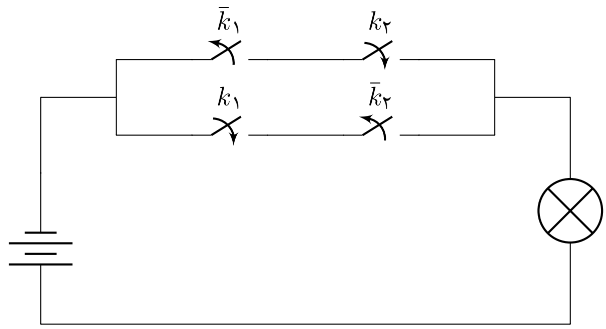
حل : ابتدا یادآوری می‌کنیم که کلیدهای این مدار الزاماً مانند کلیدهای معمولی نیستند و هر کدام از آنها ممکن است یک یا چند کلید از مدار را کنترل کنند. ابتدا جدول مربوط به خواسته مساله را بر حسب روشن و یا خاموش بودن کلیدها کامل می‌کنیم (جدول سمت راست در شکل بعدی) و آنچه مورد نیاز هر دو کلید است را در این جدول خلاصه می‌کنیم. در ابتدای کار فرض کنید کلیدها باز بوده و لامپ خاموش است. وقتی یکی از کلیدها بسته شود، باید لامپ روشن شود، ولی زمانی که هر دو کلید بسته است، لامپ باید خاموش شود.

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
۰	۰	۰
۰	۱	۱
۱	۰	۱
۱	۱	۰

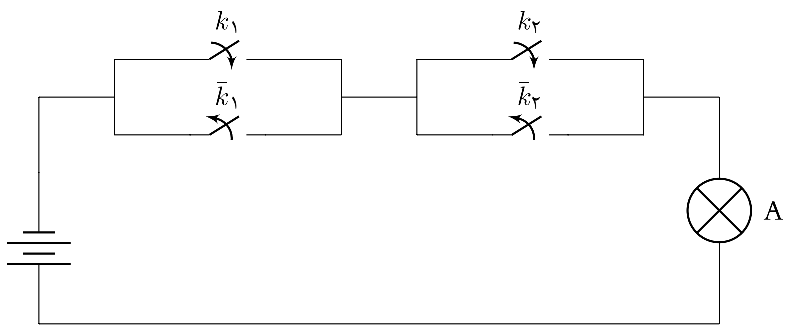
k_1	k_2	لامپ
باز	باز	خاموش
باز	بسته	روشن
بسته	باز	روشن
بسته	بسته	خاموش

فرض کنید x_1 و x_2 به ترتیب نشان دهنده وضعیت کلیدهای k_1 و k_2 و تابع $f(x_1, x_2)$ نیز نشان دهنده وضعیت جریان در مدار است. جدول متناظر را تنظیم می‌کنیم (جدول سمت چپ در شکل قبلی).

پس تابع بولی متناظر به صورت $f(x_1, x_2) = \bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2$ است و مدار متناظر چنین است:



توجه کنید که تابع f را می‌توان به صورت معادل $f(x_1, x_2) = (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)(x_1 + x_2)$ نیز نوشت (چرا). پس مدار متناظر معادل به صورت زیر است:



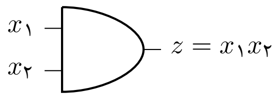
$\diamondsuit$

در ادامه این بخش، به طراحی مدارهای منطقی و کاربردی از توابع بولی می‌پردازیم.

تعریف ۶ : یک **قطعه منطقی** قطعه‌ای از یک دستگاه الکترونیکی است که روی یک یا چند ورودی عمل کرده و خروجی مناسبی تولید می‌کند. هر ورودی و یا خروجی می‌تواند یک از دو مقدار ۰ یا ۱ را اختیار کند. با توجه به طبیعت متغیرهای ورودی و خروجی، هر قطعه منطقی نمونه‌ای از ابزارهای دودویی است.

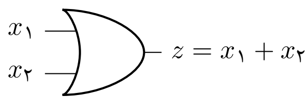
سه نوع قطعه منطقی پایه عبارتند از: AND (و، اشتراک)، OR (یا، اجتماع) و NOT (نقیض، متمم). این نام گذاری با توجه به ارتباط آنها با عملگرهای منطقی انجام شده است. برای متغیرهای ورودی از x_i و برای متغیر خروجی از z استفاده می‌کنند. شکل‌های بعدی مروری بر این سه قطعه

منطقی دارند.



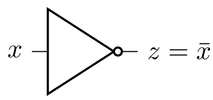
AND :

x_1x_2	x_2	x_1
۰	۰	۰
۰	۱	۰
۰	۰	۱
۱	۱	۱



OR :

$x_1 + x_2$	x_2	x_1
۰	۰	۰
۱	۱	۰
۱	۰	۱
۱	۱	۱

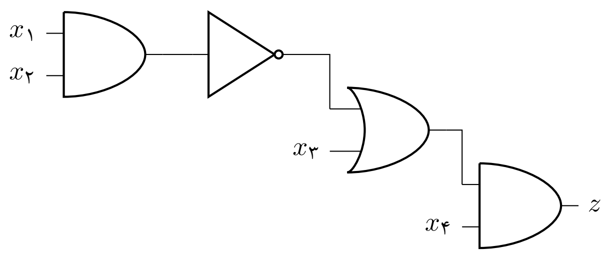


NOT :

$\bar{x}$	x
۱	۰
۰	۱

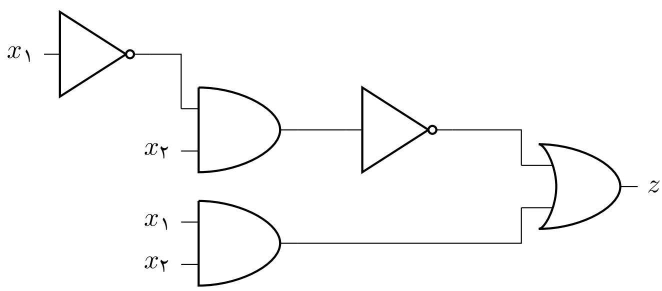
در یک مدار، تعدادی از این قطعات به هم متصل شده و هر خروجی از یک قطعه، ممکن است به عنوان ورودی در یک یا چند قطعه دیگر عمل کند. چنین مداری را شبکه منطقی یا **مدار منطقی** می‌نامند. هر مدار منطقی را می‌توان با یک تابع بولی مناسب نشان داد.

مثال ۱۶.۶ تابع بولی متناظر با مدار منطقی

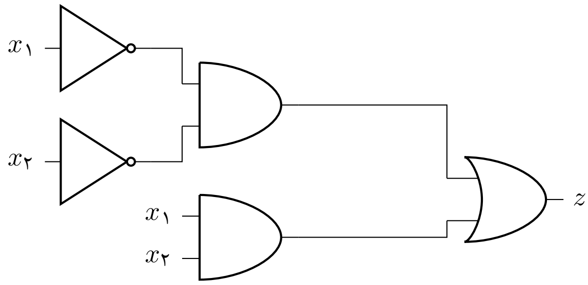


عبارت است از $z = f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\overline{x_1x_2} + x_3)x_4$. ◊

مثال ۱۷.۶ تابع بولی متناظر با مدار منطقی

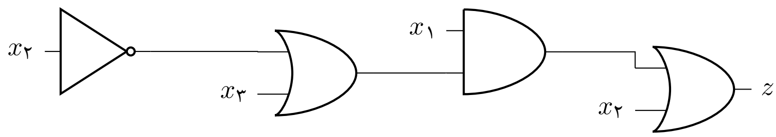


عبارت است از $z = f(x_1, x_2) = (\overline{x_1 x_2}) + (x_1 x_2)$ و تابع بولی متناظر با مدار منطقی



به صورت$z = f(x_1, x_2) = (x_1 x_2) + (\bar{x}_1 \bar{x}_2)$ است. ◇

مثال ۱۸.۶ خروجی مدار منطقی

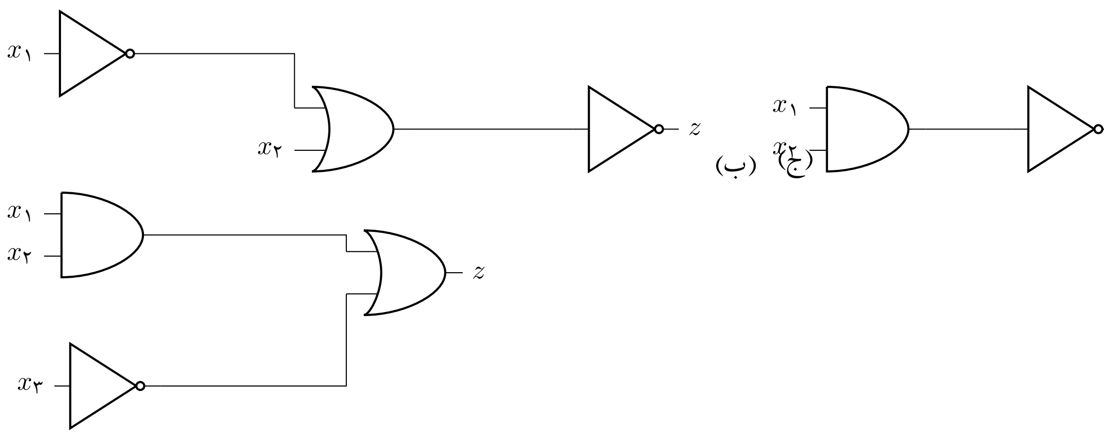


به صورت $z = x_1(\bar{x}_2 + x_3) + x_2$ است. ◇

با توجه به این که عبارت‌های بولی را می‌توان به شکل‌های معادل دیگری نوشت، پس هر مدار منطقی را می‌توان به مدارهای منطقی معادل تبدیل کرد. منظور از ساده‌ترین مدار، مداری است که با مدار منطقی داده شده معادل است ولی از قطعات منطقی کمتری استفاده می‌کند. این موضوع را در بخش بعدی بررسی می‌کنیم.

تمرین ۳.۶

۱. توابع کلیدی متناظر با مدارهای کلیدی زیر را بنویسید:



۲. مدارهای کلیدی متناظر با توابع زیر را رسم کنید.

(آ) $z = f(x_{۱}, x_{۲}) = (x_{۱} + x_{۲})\bar{x}_{۱}$

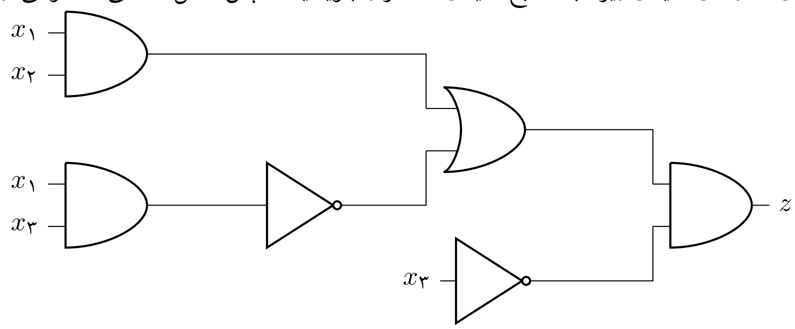
(ب) $z = f(x_{۱}, x_{۲}) = x_{۱}x_{۲}(x_{۱} + x_{۲})$

(ج) $z = f(x_{۱}, x_{۲}, x_{۳}) = (x_{۱} + \bar{x}_{۲} + x_{۳})\bar{x}_{۱}$

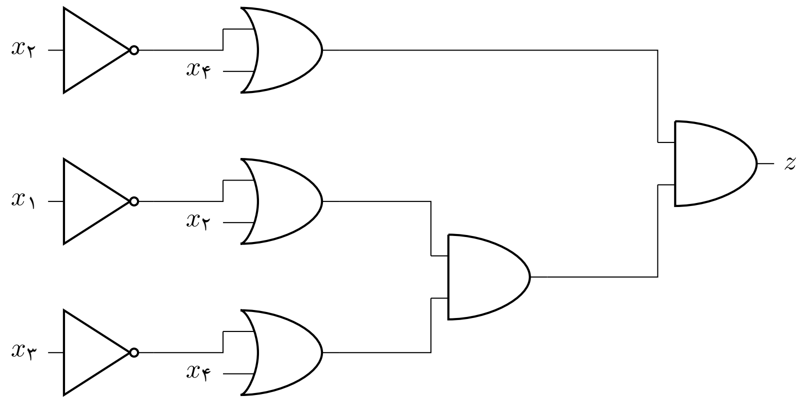
(د) $z = f(x_{۱}, x_{۲}, x_{۳}) = (x_{۱} + x_{۳})(\bar{x}_{۲} + \bar{x}_{۱})$

(ه) $z = f(x_{۱}, x_{۲}, x_{۳}) = \bar{x}_{۱}(x_{۲}x_{۳} + \bar{x}_{۲}x_{۱})$

۳. برای مدارهای کلیدی زیر، ابتدا تابع کلیدی متناظر را بنویسید. سپس شکل اساسی مجموعی از

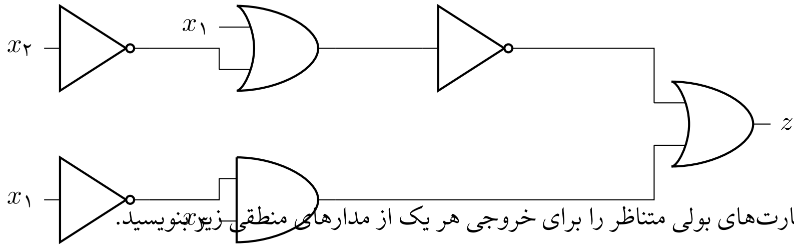


ر معادل را دوباره رسم کنید. (الف)



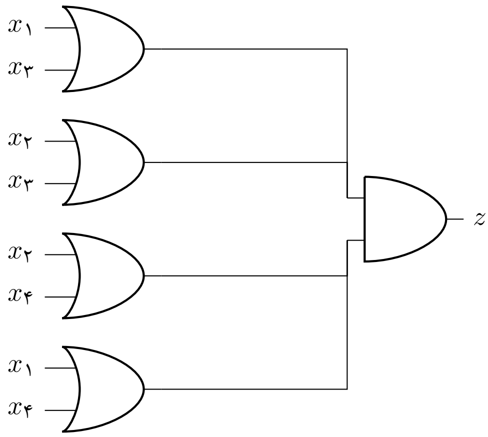
(ب)

(ج)

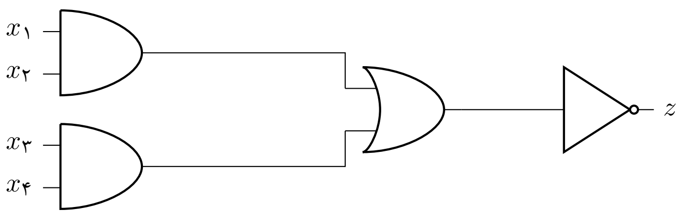


۴. عبارت‌های بولی متناظر را برای خروجی هر یک از مدارهای منطقی زیر بنویسید.

(الف)



(ب)



۵. برای هر یک از عبارت‌های بولی زیر، مدار منطقی معادلی رسم کنید.

(آ) $(x_1 + x_2)(\bar{x}_1 + x_3)$

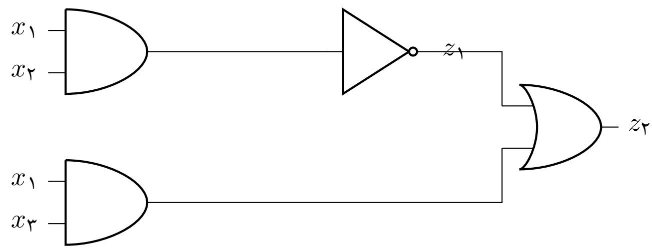
(ب) $\bar{x}_1 x_2 + x_3 x_2 + x_1$

(ج) $x_1 x_3 + \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_3$

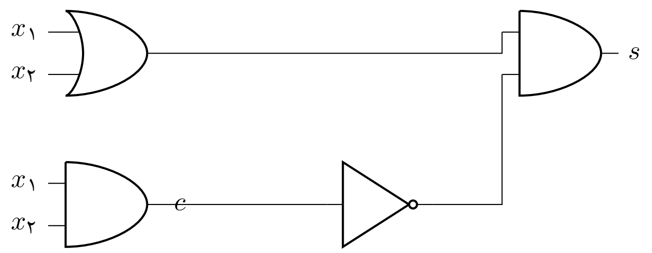
(د) $x_1 x_2 x_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$

(ه) $(x_1 + \bar{x}_2 + x_3)(\bar{x}_1 + x_3)x_2$

۶. مدارهای منطقی زیر بیش از یک خروجی دارند. برای هر خروجی آنها عبارت بولی مناسبی بنویسید.



(آ) مدار نیم‌افزاینده (دو خروجی z_1 و z_2)



(ب) مدار تمام افزاینده: (دو خروجی c و s)

۴.۶ بهینه کردن عبارت‌های بولی

فرض کنید یک عبارت بولی داده شده است. هدف، یافتن ساده‌ترین عبارت بولی معادل است. با توجه به تناظر موجود بین عبارت‌های بولی و مدار منطقی، این امر در طراحی مدارها مهم بوده و موجب کاهش هزینه و سادگی در طراحی می‌شود. ابتدا مفهوم ساده‌ترین عبارت را بیان می‌کنیم.

منظور از ساده‌ترین عبارت بولی معادل با یک عبارت بولی، عبارتی است که در شرایط زیر صدق کند.

۱. این عبارت به شکل اساسی مجموعی از ضرب عبارت‌های یک حرفی بول است.

۲. تعداد جملات آن در بین عبارت‌های معادل، کمترین است.

۳. اگر تعداد جملات در عبارت‌های معادل مساوی باشد، آنگاه عبارت‌های یک‌حرفی بولی به کار رفته، کمترین است.

چنین شکلی از عبارت بولی را **شکل مینیمال** گویند.

در ادامه بخش، یک روشی نموداری برای به دست آوردن شکل مینیمال یک عبارت بولی بیان می‌شود.

نمودار کارنو

در این روش، یک مستطیل به مستطیل‌های کوچک‌تر تقسم می‌شود که آنها را **حجره** می‌نامند و هر حجره ممکن است برای نمایش یک عبارت ضربی کامل استفاده شود. چنین مستطیلی را نمودار کارنو[3] گویند. برای تعداد معینی از متغیرهای بولی داده شده، حجره‌های نمودار، تمامی عبارت‌های ضربی کامل که امکان حضور در شکل اساسی مجموعی از ضرب‌ها را دارند، نمایش می‌دهند. عبارت‌های ضربی کامل چنان به حجره‌ها نسبت داده می‌شوند که هر دو حجره مجاور نشان دهنده عبارت‌های ضربی کامل هستند که تمامی عبارت‌های یک حرفی بول آنها، به جز یکی، مساوی باشند. پس در حرکت

[3] Maurice Karnaugh (1924-)

حجره به حجره در نمودار (افقی یا عمودی و نه مورب) دنباله‌ای از عبارت‌های ضربی کامل را به دست می‌آوریم که اعضای متوالی این دنباله، تنها در یک عبارت یک حرفی بول از هم متمایز هستند. به عنوان مثال، نمودار کارنو برای متغیرهای بولی x_1 و x_2 به صورت زیر است.

	x_2	$\overline{x}_2$
x_1	x_1x_2	$x_1\overline{x}_2$
$\overline{x}_1$	$\overline{x}_1x_2$	$\overline{x}_1\overline{x}_2$

در هر حجره، عبارت ضربی کامل متناظر نوشته می‌شود. توجه کنید که اگر از ستون چپ و راست را مجاور فرض کنیم، دوباره شرط مذکور رعایت شده است. همین شرط برای ردیف‌های بالا و پایین نیز برقرار است.

مثال ۱۹.۶ نمودار کارنو برای سه متغیر بولی x_1، x_2 و x_3 را بنویسید.

حل : داریم:

	x_2x_3	$\overline{x}_2x_3$	$\overline{x}_2\overline{x}_3$	$x_2\overline{x}_3$
x_1	a	b	c	d
$\overline{x}_1$	e	f	g	h

در این شکل، حجره‌ای که با a نشان داده شده است، نمایش دهنده عبارت ضربی کامل $x_1x_2x_3$ است. مقادیر سایر حجره‌ها نیز به روش مشابه مشخص می‌شود. $\diamondsuit$

هرگاه بخواهیم یک عبارت بولی را که به صورت مجموعی از عبارت‌های ضربی کامل بیان شده است، با نمودار کارنو نشان دهیم، کافی است به جای حجره‌های متناظر عدد ۱ قرار دهیم. به عنوان مثال، عبارت بولی $x_1x_2 + \bar{x}_1x_2$ به صورت

	x_2	$\overline{x}_2$
x_1	۱	
$\overline{x}_1$	۱	

نمایش داده می‌شود. به همین ترتیب، عبارت بولی $x_1\bar{x}_2x_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2x_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3$ به صورت زیر نمایش داده می‌شود.

	x_2x_3	$\overline{x}_2x_3$	$\overline{x}_2\overline{x}_3$	$x_2\overline{x}_3$
x_1		۱	۱	
$\overline{x}_1$	۱			۱

توجه داشته باشید هرگاه در دو حجره مجاور عدد ۱ نوشته شود، به این مفهوم است که این دو عبارت ضربی کامل تنها در یک متغیر بولی مشترک نیستند. در چنین حالتی، این متغیر قابل حذف

است. به عنوان مثال در نمودار فوق، در دریف بالا؛ دو عدد مجاور ۱ وجود دارند که نشان دهنده عبارت‌های ضربی کامل $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ و $x_1\bar{x}_2x_3$ هستند و داریم:

$$x_1\bar{x}_2x_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 = x_1\bar{x}_2(x_3 + \bar{x}_3) = x_1\bar{x}_2.$$

بنابراین، می‌توان دو جمله با ۶ عبارت یک حرفی بول را با یک جمله از دو عبارت یک حرفی بول نشان داد. اگر دوباره به نمودار نگاه کنیم، دو حجره مجاور دیگر نیز ۱ هستند، زیرا ستون راست و چپ را مجاور فرض کرده‌ایم. داریم:

$$\bar{x}_1x_2x_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 = \bar{x}_1x_2(x_3 + \bar{x}_3) = \bar{x}_1x_2.$$

پس

$$x_1\bar{x}_2x_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2x_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 = x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1x_2.$$

در واقع، این شکل معادل، شکل مینیمال عبارت بولی سمت چپ است.

این ایده را می‌توان برای مستطیل‌های بزرگ‌تر نیز تعمیم داد. به عنوان مثال برای نمودار کارنوی بعدی داریم:

	x_2x_3	$\bar{x}_2x_3$	$\bar{x}_2\bar{x}_3$	$x_2\bar{x}_3$
x_1		۱	۱	
$\bar{x}_1$		۱	۱	

$$\begin{aligned} x_1\bar{x}_2x_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 &= x_1\bar{x}_2(x_3 + \bar{x}_3) + \bar{x}_1\bar{x}_2(x_3 + \bar{x}_3) \\ &= x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1\bar{x}_2 \\ &= (x_1 + \bar{x}_1)\bar{x}_2 = \bar{x}_2. \end{aligned}$$

این روند برای ساده کردن عبارت بولی و به دست آوردن شکل مینیمال را به صورت زیر خلاصه می‌کنیم.

الگوریتم ۱.۶ گام اول هر عدد ۱ را که تمامی حجره‌های مجاور آن خالی است، مشخص کنید. جملات متناظر با این حجره‌ها بدون هیچ تغییری در شکل مینیمال ظاهر می‌شوند.

گام دوم هر عدد ۱ را که تنها با یک عدد دیگر ۱ مجاور است، مشخص کنید و آن دو عدد را در یک منحنی بسته قرار دهید. برای این زوج محصور شده، به جای دو عبارت ضربی کامل متناظر، تنها یک جمله قرار داده می‌شود و این جمله به صورت حاصل‌ضرب یک‌حرفی‌های بولی مشترک این دو عبارت ضربی کامل است.

گام سوم تمامی اعداد را که بتوان در یک بلوک چهارتایی قرار داد، مشخص کنید و آنها را در یک منحنی بسته محدود کنید. به جای جملات متناظر با این چهار حجره، جمله‌ای را می‌نویسیم که به صورت ضرب عبارت‌های یک‌حرفی بولی مشترک این حجره‌ها است.

گام چهارم تمامی اعداد ۱ را که بتوان در یک بلوک هشت‌تایی قرار دارد، مشخص کرده و آنها را در یک منحنی بسته محصور کنید. به جای جملات متناظر با این هشت حجره، جمله‌ای را بنویسید که به صورت ضرب عبارت‌های یک‌حرفی بولی مشترک این حجره‌ها است.

گام پنجم برای هر حجره باقیمانده شامل عدد ۱، بزرگترین گروه مستطیلی ممکن ایجاد کنید، به طوری که تعداد مستطیل‌ها کمینه باشد. در نهایت، باید هر حجره شامل ۱ حداقل در یک بلوک قرار گیرد.

مثال ۲۰.۶ شکل مینیمال برای عبارت بولی زیر را بیابید:

$$x_1x_2x_3 + x_1\bar{x}_2x_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3.$$

حل : نمودار کارنوی متناظر به صورت زیر است:

	x_2x_3	$\bar{x}_2x_3$	$\bar{x}_2\bar{x}_3$	$x_2\bar{x}_3$
x_1	۱	۱	۱	
$\bar{x}_1$			۱	۱

هیچ عدد ۱ وجود ندارد که در همسایگی آن عدد ۱ دیگری وجود نداشته باشد. پس گام دوم را اجرا کنید. در این گام، آن اعداد ۱ را مشخص کنید که تنها یک همسایه دارند و داریم:

۱	۱	۱	
		۱	۱

هیچ بلوک چهارتایی از اعداد ۱ وجود ندارد و تنها کاری که می‌توان انجام داد، برای ۱ محصور نشده، ساختن یک بلوک دوتایی است. این کار را می‌توان به دو روش مختلف انجام داد، که به صورت نمودارهای بعدی هستند.

۱	۱	۱	
		۱	۱

۱	۱	۱	
		۱	۱

متناظر با این دو جدول، شکل‌های مینیمال زیر نوشته می‌شوند.

۱. $x_1x_3 + \bar{x}_1\bar{x}_3 + \bar{x}_2\bar{x}_3$

۲. $x_1x_3 + \bar{x}_1\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2$

پس دو شکل مینیمال وجود دارد $\diamond$

مثال ۲۱.۶ شکل مینیمال عبارت بولی زیر را مشخص کنید.

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1x_2x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 \\ &+\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4. \end{aligned}$$

حل : نمودار کارنوی متناظر چنین است:

	$x_{۳}x_{۴}$	$\overline{x}_{۳}x_{۴}$	$\overline{x}_{۳}\overline{x}_{۴}$	$x_{۳}\overline{x}_{۴}$
$x_{۱}x_{۲}$			۱	۱
$\overline{x}_{۱}x_{۲}$			۱	
$\overline{x}_{۱}\overline{x}_{۲}$	۱	۱		
$x_{۱}\overline{x}_{۲}$	۱	۱		۱

در این شکل، هیچ عدد یک منفرد وجود ندارد. تنها یک مورد وجود دارد که یک شریک دارد و آن نیز در ردیف دوم است و داریم:

		۱	۱
		۱	
۱	۱		
۱	۱		۱

یک بلوک چهارتایی از اعداد ۱ در گوشه چپ پایینی قرار دارد و ۱ های باقیمانده را می‌توان با هم جفت کرد. داریم:

		۱	۱
		۱	
۱	۱		
۱	۱		۱

بنابراین، شکل مینیمال عبارت است از:

$$\bar{x}_{۲}x_{۴}+x_{۲}\bar{x}_{۳}\bar{x}_{۴}+x_{۱}x_{۳}\bar{x}_{۴}.$$

$\diamondsuit$

مثال ۲۲.۶ شکل مینیمال برای عبارت بولی زیر را بنویسید:

$$\begin{aligned} f(x_{۱},x_{۲},x_{۳},x_{۴}) &= x_{۱}x_{۲}\bar{x}_{۳}x_{۴}+\bar{x}_{۱}x_{۲}\bar{x}_{۳}x_{۴}+\bar{x}_{۱}x_{۲}\bar{x}_{۳}\bar{x}_{۴}+\bar{x}_{۱}x_{۲}x_{۳}\bar{x}_{۴} \\ &\quad +\bar{x}_{۱}\bar{x}_{۲}x_{۳}x_{۴}+\bar{x}_{۱}\bar{x}_{۲}\bar{x}_{۳}x_{۴}+\bar{x}_{۱}\bar{x}_{۲}\bar{x}_{۳}\bar{x}_{۴}+x_{۱}\bar{x}_{۲}\bar{x}_{۳}\bar{x}_{۴}. \end{aligned}$$

حل : نمودار کارنو برای این عبارت بولی چنین است

	۱		
	۱	۱	۱
۱	۱	۱	
		۱	

پس شکل مینیمال به صورت

$$x_1\bar{x}_2x_4 + x_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_4 + \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4,$$

است. $\diamondsuit$

اگر ترتیب اجرای الگوریتم را رعایت نکنیم، ممکن است شکل به دست آمده مساله مینیمال نباشد. به عنوان نمونه، در مثال قبلی اگر با یک بلوک چهارتایی شروع کنیم شکلی مانند زیر داریم:

	۱		
	۱	۱	۱
۱	۱	۱	
		۱	

در این صورت تعداد جملات عبارت بولی معادل به دست آمده، پنج جمله است که به وضوح مینیمال نیست.

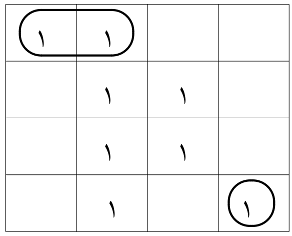
مثال ۲۳.۶ شکل مینیمال عبارت بولی زیر را بیابید.

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \\ &\quad + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4. \end{aligned}$$

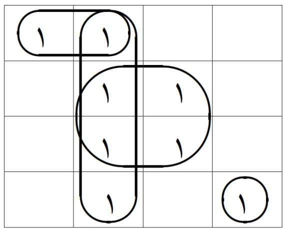
حل : نمودار کارنو متناظر چنین است:

۱	۱		
	۱	۱	
	۱	۱	
	۱		۱

ابتدا، اعضای ۱ منفرد را علامت‌گذاری می‌کنیم و گام دوم از الگوریتم را نیز اجرا می‌کنیم. داریم:



دو بلوک چهارتایی از اعداد ۱ وجود دارد و داریم:



پس شکل مینیمال به صورت

$$x_1x_2x_3 + \bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4,$$

است. $\diamondsuit$

تمرین ۴.۶

۱. شکل مینیمال هر یک از عبارت‌های زیر را بنویسید.

(آ) $x_1x_2x_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$

(ب) $x_1x_2x_3 + x_1\bar{x}_2x_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2x_3$

(ج) $x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2x_3x_4 + \bar{x}_1x_2x_3x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$

(د) $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4+\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4+x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4+x_1x_2x_3\bar{x}_4+x_1x_2\bar{x}_3x_4+\bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4$

(ه) $x_1x_2x_3x_4+x_1\bar{x}_2x_3x_4+x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4+x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4+\bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4+\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$

۲. برای عبارت‌های زیر، ابتدا شکل اساسی جمع از ضرب‌های کامل را بنویسید و سپس با استفاده از نمودار کارنو، شکل مینیمال معادل را به دست آورید.

(آ) $x_1(x_2x_3 + \bar{x}_3)$

(ب) $(x_1 + x_2)(\bar{x}_2 + x_3)$

(ج) $(x_1 + x_2 + x_3)(\bar{x}_1 + x_3)$

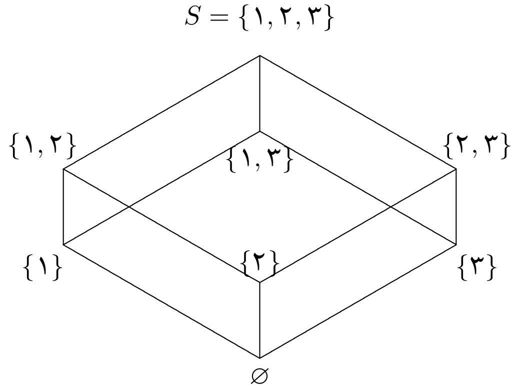
(د) $(x_1 + \bar{x}_2 + x_3)(\bar{x}_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2)$

۵.۶ ترتیب جزیی، جبر بول و یکریختی

در این بخش، یک ترتیب جزیی برای جبر بول ایجاد می‌کنیم. به عنوان مثال، مجموعه

$$S = \{۱, ۲, ۳\}$$

و جبر بول $(\mathcal{B} = \mathcal{P}(S), \cup, \cap, ^{-}, \varnothing, S)$ را در نظر بگیرید. مجموعه $\varnothing$ را نمی‌توان از اجتماع مجموعه‌های دیگر $\mathcal{B}$ نوشت. مجموعه‌های یک عضوی $\{۱\}$، $\{۲\}$ و $\{۳\}$ را بعد از $\varnothing$ اختیار می‌کنیم، طوری که هر عضو دیگر در جبر بول $\mathcal{B}$ که دو عضو داشته باشد، بتوان به صورت جمع بول این اعضا نوشته شود و نهایتاً، مجموعه سه‌عضوی S نیز به صورت جمع بول اعضای دو عضوی جبر بول نوشته شود. همچنین، مجموعه S را می‌توان به صورت مجموع بولی از مجموعه‌های تک‌عضوی $\mathcal{B}$ نوشت. در نتیجه، می‌توان نوعی ترتیب جزیی مانند نمودار زیر به دست آورد.



اگر $\mathcal{B}$ یک جبر بول و $x, y \in \mathcal{B}$، رابطه زیر را تعریف می‌کنیم:

$$x \preceq y \Leftrightarrow xy = x. \qquad (۱.۶)$$

همانند روابط موجود در نظریه مجموعه‌ها، داریم:

$$A \subseteq B \Rightarrow (A \cap B = A, A \cup B = B).$$

نشان می‌دهیم رابطه $\preceq$ یک ترتیب در $\mathcal{B}$ تعریف می‌کند.

قضیه ۱۲.۶ *رابطه تعریف شده در (۱.۶) یک ترتیب جزیی است.*

برهان: چون برای هر $x \in \mathcal{B}$، $xx = x$ ؛ پس $x \preceq x$ و رابطه $\preceq$ خاصیت بازتابی دارد. اگر x و y در $\mathcal{B}$ با هم روابط $y \preceq x$ و $x \preceq y$ را داشته باشند، آنگاه

$$yx = y, \quad xy = x,$$

و از خاصیت جابجایی $yx = xy$ نتیجه می‌شود که $x = y$. یعنی $\preceq$ یک رابطه متقارن است. همچنین؛ اگر برای x، y و z در $\mathcal{B}$ ، $x \preceq y$ و $y \preceq z$ باشند، آنگاه

$$xy = x, \quad yz = y.$$

پس
$$x = xy = x(yz) = (xy)z = xz.$$
در نتیجه $x = xz$ و بنابراین $x \preceq z$. یعنی رابطه $\preceq$ خاصیت تراگذری دارد.

تعریف ۷ : عضو صفر در جبر بول $\mathcal{B}$ را در نظر بگیرید. یک عضو غیرصفر $x \in \mathcal{B}$ را عضو مینیمال در $\mathcal{B}$ می‌نامند هرگاه به ازای هر $y \in \mathcal{B}$، از $\circ \preceq y \preceq x$ نتیجه بگیریم که $y = \circ$ یا $y = x$.

مثال ۲۴.۶ در جبر بول زیرمجموعه‌های $S = \{۱, ۲, ۳\}$، عضوهای مینیمال عبارتند از $\{۱\}$، $\{۲\}$ و $\{۳\}$. همچنین، در جبر بول مقسوم‌علیه‌های عدد ۳۰، عضوهای مینیمال عبارتند از ۲، ۳ و ۵. در جبر بول $F_n = \{f : \mathcal{B}^n \to \mathcal{B}\}$، عضوهای مینیمال همان عبارت‌های ضربی کامل هستند.

قضیه ۱۳.۶ ۱. *اگر x یک عضو مینیمال در جبر بول $\mathcal{B}$ باشد، آنگاه به ازای هر $y \in \mathcal{B}$، $xy = \circ$ یا $xy = x$.*

۲. *اگر $x_۱$ و $x_۲$ دو عضو مینیمال در $\mathcal{B}$ باشند و $x_۱ \neq x_۲$؛ آنگاه $x_۱x_۲ = \circ$.*

برهان:

۱. برای هر x و y در $\mathcal{B}$، داریم: $xy \preceq y$؛ زیرا $xy = x(xy) = (xy)x$. حال اگر x عضو مینیمال باشد، آنگاه
$$xy \preceq y \Rightarrow (xy = \circ \text{ یا } xy = x).$$

۲. این قسمت نتیجه‌ای از قسمت قبلی است.

قضیه ۱۴.۶ *اگر $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n عضوهای مینیمال جبر بول $\mathcal{B}$ باشند و برای هر $x \in \mathcal{B}$ داشته باشیم $xx_i = \circ$ ؛ $(۱ \leq i \leq n)$ آنگاه $x = \circ$.*

برهان: اگر $x \neq \circ$، قرار دهید $S = \{y \in \mathcal{B}, \circ \prec y \preceq x\}$. چون $x \in S$ پس $S \neq \varnothing$، پس می‌توان عضوی مانند z از $\mathcal{B}$ یافت به طوری که $\circ \prec z \preceq x$ و هیچ عضو دیگری در $\mathcal{B}$ بین صفر و z وجود نداشته باشد. در این صورت z یک عضو مینیمال بوده و داریم $\circ \prec z = xz = \circ$. از این تناقض، $x = \circ$ نتیجه می‌شود.

قضیه ۱۵.۶ *اگر $\mathcal{B}$ یک جبر بول و $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n عضوهای مینیمال $\mathcal{B}$ باشند، آنگاه هر عضو x در $\mathcal{B}$ را می‌توان به طور منحصر به فرد به صورت جمع بولی اعضای مینیمال نوشت. یعنی*
$$x = c_۱x_۱ + c_۲x_۲ + \cdots + c_nx_n = \sum_{i=۱}^{n} c_ix_i, \quad c_i = \circ \text{ یا } ۱.$$

بر اساس این قضیه، هر عضو x از $\mathcal{B}$ با یک nــتایی $(c_۱, \ldots, c_n)$ متناظر می‌شود. چون تعداد nــتایی‌ها ۲^n است، پس اگر $\mathcal{B}$ یک جبر بول متناهی با n عضو مینیمال است، آنگاه $|\mathcal{B}| = ۲^n$.

تعریف ۸ : دو جبر بول $\mathcal{B}_۱$ و $\mathcal{B}_۲$ **یکریخت** هستند هرگاه تناظری یک به یک مانند f از $\mathcal{B}_۱$ به $\mathcal{B}_۲$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $x_۱$ و $x_۲$ در $\mathcal{B}_۱$ داشته باشیم:

۱. $f(x_۱ + x_۲) = f(x_۱) + f(x_۲)$

۲. $f(x_۱x_۲) = f(x_۱)f(x_۲)$

۳. $f(\bar{x}_۱) = \overline{f(x_۱)}$

یعنی تناظر یک به یک f، حافظ ساختارهای جبر بول است [۴].

قضیه ۱۶.۶ *هر جبر بول متناهی $\mathcal{B}$ با جبر بول مجموعه‌ها یکریخت است.*

برهان: چون $\mathcal{B}$ متناهی است، فرض کنید n عضو مینیمال آن x_i ، $۱ \leq i \leq n$ هستند. پس $|\mathcal{B}| = ۲^n$. فرض کنید $S = \{۱, ۲, \ldots, n\}$ و $\mathcal{P}(S)$ جبر بول زیرمجموعه‌های S است. تابع f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x = \sum_{i=۱}^{n} c_i x_i \in \mathcal{B},\ c_i = ۰ \text{یا} ۱,\ \ f : \mathcal{B} \to \mathcal{P}(S),\ \ f(x) = \{i | c_i = ۱, ۱ \leq i \leq n\}.$$

به عنوان مثال، $f(۰) = \varnothing$ و $f(x_i) = \{i\}$ ، $۱ \leq i \leq n$ و x_i عضو مینیمال $\mathcal{B}$ است. داریم:

$$f(x_۱ + x_۲) = \{۱, ۲\}, \quad f(x_۲ + x_۴ + x_۷) = \{۲, ۴, ۷\}.$$

در حالت کلی، فرض کنید x و y دو عضو از $\mathcal{B}$ هستند و داریم:

$$x = \sum_{i=۱}^{n} c_i x_i, \quad y = \sum_{i=۱}^{n} d_i x_i,$$

که در آن، برای $۱ \leq i \leq n$ ، $c_i, d_i \in \{۰, ۱\}$. ابتدا داریم:

$$x + y = \sum_{i=۱}^{n} s_i x_i, \quad s_i = c_i + d_i, \quad ۱ \leq i \leq n.$$

(توجه کنید که $۱ + ۱ = ۱$) و بنابراین:

$$\begin{aligned} f(x+y) &= \{i | ۱ \leq i \leq n, s_i = ۱\} \\ &= \{i | ۱ \leq i \leq n, c_i = ۱ \text{ یا } d_i = ۱\} \\ &= \{i | ۱ \leq i \leq n, c_i = ۱\} \cup \{i | ۱ \leq i \leq n, d_i = ۱\} \\ &= f(x) \cup f(y). \end{aligned}$$

با روش مشابه؛

$$xy = \sum_{i=۱}^{n} t_i x_i, \quad t_i = c_i d_i, \quad ۱ \leq i \leq n.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} f(xy) &= \{i | ۱ \leq i \leq n, t_i = ۱\} \\ &= \{i | ۱ \leq i \leq n, c_i = ۱ \text{ و } d_i = ۱\} \\ &= \{i | ۱ \leq i \leq n, c_i = ۱\} \cap \{i | ۱ \leq i \leq n, d_i = ۱\} \\ &= f(x) \cap f(y). \end{aligned}$$

[۴] توجه داشته باشید که اعمال $+$، $*$ و $^-$ نوشته شده در این تعریف، در سمت چپ تساوی‌ها در جبر بول $\mathcal{B}_۱$ و در سمت راست تساوی‌ها در جبر بول $\mathcal{B}_۲$ هستند.

برای اتمام برهان یکریختی f، اگر $x=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$، آنگاه $\bar{x}=\sum_{i=1}^{n}\bar{c}_i x_i$. همچنین،

$$\begin{aligned} x+\bar{x} &= \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{i=1}^{n}\bar{c}_i x_i = \sum_{i=1}^{n}(c_i+\bar{c}_i)x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ x\bar{x} &= \left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\bar{c}_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(c_i\bar{c}_i)x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 x_i = 0. \end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= \{i \mid 1\le i\le n, \bar{c}_i = 1\} \\ &= \{i \mid 1\le i\le n, c_i = 0\} \\ &= \overline{\{i \mid 1\le i\le n, c_i = 1\}} = \overline{f(x)}. \end{aligned}$$

بنابراین تابع f حافظ ساختارهای جبر بول بوده و یکریختی است. تمرین ۵.۶

۱. رابطه $\preceq$ را در

$$\mathcal{F}_n = \{f \mid f:\mathcal{B}^n \to \mathcal{B}\},$$

در نظر بگیرید که در آن برای هر $f,g\in\mathcal{F}_n$ ، $f\preceq g$ اگر و فقط اگر $f(x)\le g(x)$. به عبارت دیگر، اگر $f(x)=0$ آنگاه $g(x)=0$ یا $g(x)=1$ و اگر $f(x)=1$ آنگاه $g(x)=1$.

(آ) نشان دهید رابطه $\preceq$ در $\mathcal{F}_n$ یک رابطه ترتیب است.

(ب) ثابت کنید $fg\preceq g$.

۲. برای $f,g:\mathcal{B}^n\to\mathcal{B}$، عمل دودویی $\otimes$ [۵] را به صورت زیر تعریف کنید.

$$f\otimes g = f\bar{g}+\bar{f}g.$$

(آ) $f\otimes f$، $f\otimes\bar{f}$، $f\otimes 1$ و $f\otimes 0$ را مشخص کنید.

(ب) درستی عبارت‌های زیر را اثبات کنید.

i. $f\otimes g = 0 \Rightarrow f=g$

ii. $f\otimes(g\otimes h) = (f\otimes g)\otimes h$

iii. $f\otimes g = g\otimes f$

iv. $f\otimes gh = (f\otimes g)(f\otimes h)$

v. $f(g\otimes h) = fg\otimes fh$

vi. $\overline{f\otimes g} = \bar{f}\otimes g = f\otimes\bar{g}$

vii. $f\otimes g = f\otimes h \Rightarrow g=h$

۳. فرض کنید $f:\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2$ یک یکریختی جبر بول است. ثابت کنید:

(آ) $f(0)=0$

---

[۵] XOR

(ب) $f(1) = 1$

(ج) اگر $x, y \in \mathcal{B}_1$ و $x \preceq y$، آنگاه در $\mathcal{B}_2$، $f(x) \preceq f(y)$.

(د) اگر x یک اتم در $\mathcal{B}_1$ باشد، آنگاه $f(x)$ نیز یک اتم در $\mathcal{B}_2$ است.

(ه) اگر ϕ_1 یک زیرجبر بول در $\mathcal{B}_1$ باشد، آنگاه $f(\phi_1)$ نیز یک زیرجبر بول در $\mathcal{B}_2$ است. (منظور از یک زیرجبر بول، زیرمجموعه‌ای از جبر بول $\mathcal{B}$ است که با اعمال تعریف شده در $\mathcal{B}$، یک جبر بول است.)

فصل ۷

میدان‌های متناهی و کاربرد آنها

در این فصل ابتدا مفاهیم مقدماتی در میدان‌های متناهی را بیان می‌کنیم و در بخش‌های بعدی با کاربردهایی از آنها، از جمله کاربردهای ترکیبیاتی مانند ماتریس‌های هادامار[۱]، طرح‌های بلوکی، مربع‌های لاتین آشنا می‌شوید. بدیهی است با توجه به حجم کتاب، اطلاعات بیشتر در این مباحث از کتاب‌های تخصصی‌تر مانند [۲۴] مورد انتظار است.

۱.۷ میدان‌های متناهی

در این بخش فرض بر این است که دانشجو با نظریه میدان‌های نامتناهی آشنایی کافی دارد و فقط به توضیح حالت متناهی می‌پردازیم. یک میدان با m عضو را یک **میدان متناهی** از مرتبه m می‌نامند.

مثال ۱.۷ برای هر عدد اول p، مجموعه $\mathbb{Z}_p = \{۰, ۱, ۲, \dots, p - ۱\}$ همراه با عمل‌های جمع و ضرب با پیمانه p یک میدان متناهی از مرتبه p است.

فرض کنید $F[x]$ میدان چندجمله‌ای‌ها و $f(x)$ یک چندجمله‌ای در این میدان و $\deg f \geq ۲$ است. $f(x)$ را **تحویل‌پذیر** می‌نامند هرگاه چندجمله‌ای‌های $g(x)$ و $h(x)$ در $F[x]$ موجود باشند به طوری که $f(x) = g(x).h(x)$ و $\deg g \geq ۱$ و $\deg h \geq ۱$. در غیر این صورت چندجمله‌ای $f(x)$ را **تحویل‌ناپذیر** یا **چندجمله‌ای اول** روی میدان F می‌نامند.

قضیه ۱.۷ [۲۳] (*بدون اثبات*) *برای چندجمله‌ای‌های عضو میدان $F[x]$:*

۱. *هر چندجمله‌ای از درجه حداکثر یک، تحویل ناپذیر است.*

۲. *اگر $f(x) \in F[x]$ یک چندجمله‌ای از درجه ۲ یا ۳ باشد، آنگاه $f(x)$ تحویل‌پذیر است اگر و فقط اگر معادله $f(x) = ۰$ در میدان F جواب داشته باشد.*

مثال ۲.۷ چندجمله‌ای $x^۲ + ۱$ در $\mathbb{Q}[x]$ و $\mathbb{R}[x]$ تحویل‌ناپذیر است در حالی که این چندجمله‌ای در $\mathbb{C}[x]$ تحویل‌پذیر بوده و داریم: $x^۲ + ۱ = (x + i)(x - i)$.

[۱] Jacques Salomon Hadamard (1865 – 1963)

مثال ۳.۷ چندجمله‌ای $f(x) = x^{۴} + ۲x^{۲} + ۱$ در میدان $\mathbb{R}[x]$ ریشه حقیقی ندارد اما تحویل‌پذیر است و داریم

$$x^{۴} + ۲x^{۲} + ۱ = (x^{۲} + ۱)^{۲}.$$

این مثال نشان می‌دهد که قضیه ۱.۷ برای چندجمله‌ای‌های با درجه بیشتر از ۳ برقرار نیست.

مثال ۴.۷ چندجمله‌ای $f(x) = x^{۳} + x^{۲} + x + ۱$ در میدان $\mathbb{Z}_{۲}[x]$ تحویل‌پذیر است زیرا $f(۱) = ۰$. ولی چندجمله‌ای $g(x) = x^{۳} + x + ۱$ روی همین میدان تحویل‌ناپذیر است، زیرا $g(۰) = g(۱) = ۱$.

مثال ۵.۷ آیا چندجمله‌ای $h(x) = x^{۴} + x^{۳} + x^{۲} + x + ۱$ در میدان $\mathbb{Z}_{۲}[x]$ تحویل‌ناپذیر است؟

حل : چون $h(۰) = h(۱) = ۱$، پس این چندجمله‌ای عامل درجه یک ندارد. برای بررسی وجود عامل درجه دوم، فرض کنید:

$$x^{۴} + x^{۳} + x^{۲} + x + ۱ = (x^{۲} + ax + b)(x^{۲} + cx + d),$$

که در آن $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_{۲}$. با مساوی قراردادن ضریب‌ها در طرفین این معادله داریم:

$$\begin{aligned} a + c &= ۱ \\ ac + b + d &= ۱ \\ ad + bd &= ۱ \\ db &= ۱. \end{aligned}$$

نتیجه می‌شود:

$$a = b = c = d = ۱, \quad a + c = ۰, \quad a + c = ۱,$$

که یک تناقض است. پس $h(x)$ در $\mathbb{Z}_{۲}[x]$ تحویل‌ناپذیر است. $\diamondsuit$

تعریف ۱ : چندجمله‌ای $f(x) \in F[x]$ را تکین می‌نامند هرگاه ضریب جمله‌ای با بزرگ‌ترین درجه در f مساوی ۱، عضو واحد میدان F باشد.

تعریف ۲ : اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو چندجمله‌ای در $F[x]$ باشند، $h(x) \in F[x]$ را بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک $f(x)$ و $g(x)$ می‌نامند هرگاه:

۱. هر دو چندجمله‌ای $f(x)$ و $g(x)$ بر $h(x)$ بخش‌پذیر باشند.

۲. اگر $k(x) \in F[x]$ چندجمله‌ای دیگری است که هر دو چندجمله‌ای $f(x)$ و $g(x)$ بر $h(x)$ بخش‌پذیر هستند، آنگاه $k(x)$ نیز بر $h(x)$ بخش‌پذیر باشد.

مثال ۶.۷ چندجمله‌ای $x + ۱$ در $\mathbb{Z}_{۲}[x]$ بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک چندجمله‌ای‌های زیر است: (چرا؟)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{۲} + ۱ = (x + ۱)(x + ۱) \\ g(x) &= x^{۳} + ۱ = (x + ۱)(x^{۲} + x + ۱). \end{aligned}$$

قضیه ۲.۷ *فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ چندجمله‌ای‌هایی در $F[x]$ هستند و حداقل یکی از آنها مخالف صفر است. هر چندجمله‌ای با کمترین درجه به صورت ترکیب خطی از دو چندجمله‌ای $f(x)$ و $g(x)$ نوشته شود؛ یعنی*

$$h(x) = s(x)f(x) + t(x)g(x),$$

$h(x)$ بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک چندجمله‌ای‌های $f(x)$ و $g(x)$ بوده و بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک تکین منحصر به فرد است.

اکنون برای پیدا کردن بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو چندجمله‌ای $f(x)$ و $g(x)$، الگوریتم تقسیم اقلیدسی بیان می‌شود.

الگوریتم ۱.۷ فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ دو عضو از $F[x]$ هستند و $f(x) \neq 0$ و $\deg f(x)$ از $\deg g(x)$ بیشتر نیست. بر حسب الگوریتم تقسیم، می‌توان نوشت:

$$\begin{array}{ll}
g(x) = q(x)f(x) + r(x) & \deg r(x) < \deg g(x) \\
f(x) = q_1(x)r(x) + r_1(x) & \deg r_1(x) < \deg f(x) \\
r(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x) & \deg r_2(x) < \deg r_1(x) \\
\quad\vdots & \quad\vdots \\
r_{k-2}(x) = q_k(x)r_{k-1}(x) + r_k(x) & \deg r_k(x) < \deg r_{k-1}(x) \\
r_{k-1}(x) = q_{k+1}(x)r_k(x) + r_{k+1}(x) & \deg r_{k+1}(x) = 0
\end{array}$$

آنگاه، $r_k(x)$ مساوی حاصل‌ضرب یک مقدار ثابت در بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک $f(x)$ و $g(x)$ است.

تعریف ۳ : اگر $f(x), g(x) \in F[x]$ و بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک آنها ۱ باشد، آنگاه $f(x)$ و $g(x)$ را نسبت به هم اول می‌گویند.

قضیه ۳.۷ *فرض کنید $s(x) \in F[x]$ و $s(x) \neq 0$. رابطه $\mathcal{R}$ روی $F[x]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:*

$$f(x)\mathcal{R}g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = t(x)s(x), \quad t(x) \in F[x].$$

یعنی $f(x) - g(x)$ بر $s(x)$ بخش‌پذیر است. آنگاه، $\mathcal{R}$ یک رابطه هم‌ارزی است. می‌نویسیم:

$$f(x) \equiv g(x) \quad (\text{پیمانه } s(x)).$$

برای تعیین کلاس‌های هم‌ارزی به مثال بعدی توجه کنید.

مثال ۷.۷ فرض کنید $s(x) = x^2 + x + 1$ عضوی از $\mathbb{Z}_2[x]$ است. در این صورت:

$$\begin{aligned}
[0] &= [x^2 + x + 1] = \{0, x^2 + x + 1, x^3 + x^2 + x, \ldots\} \\
&= \{t(x)(x^2 + x + 1) : t(x) \in \mathbb{Z}_2[x]\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[1] &= \{1, x^2 + x, x(x^2 + x + 1) + 1, (x + 1)(x^2 + x + 1) + 1, \ldots\} \\
&= \{t(x)(x^2 + x + 1) + 1 : t(x) \in \mathbb{Z}_2[x]\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[x] &= \left\{x, x^۲+۱, x(x^۲+x+۱)+x, (x+۱)(x^۲+x+۱)+x, \ldots\right\} \\ &= \left\{t(x)(x^۲+x+۱)+x : t(x)\in \mathbb{Z}_۲[x]\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[x+۱] &= \left\{x+۱, x^۲, x(x^۲+x+۱)+x+۱, \ldots\right\} \\ &= \left\{t(x)(x^۲+x+۱)+x+۱ : t(x)\in \mathbb{Z}_۲[x]\right\}.\end{aligned}$$

بر حسب الگوریتم تقسیم اقلیدسی، $f(x)=q(x)s(x)+r(x)$ که در آن $\deg r(x) < \deg s(x)$. پس $f(x)-r(x)=t(x)s(x)$، یا

$$f(x)=r(x) \quad (s(x) \text{ پیمانه}).$$

بنابراین، در این مثال $r(x)=۰$ و یا $\deg r(x) < ۲$. یعنی $r(x)=ax+b$ که در آن $a,b\in\mathbb{Z}_۲$. با در نظر گرفتن تمامی حالت‌های ممکن برای a و b، چندجمله‌ای‌های زیر برای $r(x)$ مشخص می‌شوند:

$$۰, ۱, x, x+۱.$$

پس کلاس‌های هم‌ارزی عبارتند از: $[۰]$، $[۱]$، $[x]$ و $[x+۱]$.

با توجه به کلاس‌های هم‌ارزی به دست آمده در مثال قبلی، یک ساختار حلقه برای مجموعه کلاس‌های هم‌ارزی ایجاد می‌کنیم. در این حلقه عمل جمع به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[f(x)]+[g(x)]=[f(x)+g(x)],$$

چون $\deg(f(x)+g(x)) \le \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}$، پس می‌توان کلاس هم‌ارزی

$$[f(x)+g(x)]$$

را مشخص کرد. به عنوان مثال:

$$[x]+[x+۱]=[x+(x+۱)]=[۲x+۱]=[۱].$$

در این حلقه، عمل ضرب نیر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[f(x)][g(x)]=[f(x)g(x)].$$

چون $\deg f(x)g(x) \ge \deg s(x)$، پس به آسانی می‌توان کلاس هم‌ارزی $[f(x)g(x)]$ را مشخص کرد. با استفاده از الگوریتم تقسیم داریم:

$$f(x)g(x)=q(x)s(x)+r(x); \quad r(x)=۰ \quad \text{یا} \quad \deg r(x)<\deg s(x).$$

در نتیجه:

$$f(x)g(x)\equiv r(x) \quad (s(x) \text{ پیمانه}),$$

و بنا بر تعریف، می‌نویسیم:

$$[f(x)g(x)]=[r(x)].$$

با توجه به آنچه گفته شد، برای مجموعه $\{[۰],[۱],[x],[x+۱]\}$، عمل‌های جمع و ضرب مطابق جدول‌های بعدی تعریف می‌شوند:

$\times$	0	1	x	$x+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	x	$x+1$
x	0	x	$x+1$	1
$x+1$	0	$x+1$	1	x

$+$	0	1	x	$x+1$
0	0	1	x	$x+1$
1	1	0	$x+1$	x
x	x	$x+1$	0	1
$x+1$	$x+1$	x	1	0

مجموعه کلاس‌های هم‌ارزی ، علاوه بر تشکیل حلقه، یک میدان متناهی را نیز به وجود می‌آورند، زیرا

$$[x+1]^{-1} = [x], \quad [x]^{-1} = [x+1], \quad [1]^{-1} = [1].$$

این میدان از مرتبه چهار را با نماد $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2+x+1)$ نشان می‌دهند. علاوه بر آن، برای اعضای غیرصفر میدان داریم:

$$[x]^1 = [x], \quad [x]^2 = [x+1], \quad [x]^3 = [1].$$

بنابراین، اعضای غیرصفر این میدان یک گروه دوری از مرتبه سه به وجود می‌آورند.

در حالت کلی ثابت می‌شود که مجموعه اعضای غیرصفر هر میدان متناهی یک گروه دوری نسبت به عمل ضرب میدان است.

قضیه ۴.۷ (*بدون اثبات*) *فرض کنید $s(x)$ یک چندجمله‌ای غیرصفر در میدان $F[x]$ است. آنگاه:*

۱. *کلاس‌های هم‌ارزی $F[x]$ در رابطه همنهشتی با پیمانه $s(x)$ نسبت به عمل‌های جمع و ضرب که به صورت زیر تعریف شوند، یک حلقه جابجایی است:*

$$\begin{aligned}[f(x)]+[g(x)] &= [f(x)+g(x)]\\ [f(x)][g(x)] &= [f(x)g(x)] = [r(x)]\end{aligned}$$

در عمل ضرب، $r(x)$ باقیمانده تقسیم $f(x)g(x)$ بر $s(x)$ است. این حلقه را با $F[x]/s(x)$ نمایش می‌دهند.

۲. *اگر $s(x)$ در $F[x]$ تحویل‌ناپذیر باشد، آنگاه $F[x]/s(x)$ یک میدان متناهی است.*

۳. *اگر $|F| = q$، $\deg s(x) = n$، آنگاه میدان $F[x]/s(x)$، q^n عضو دارد.*

مثال ۸.۷ چندجمله‌ای $s(x) = x^2+x+2$ در میدان $\mathbb{Z}_3[x]$ تحویل‌ناپذیر است، زیرا

$$s(0) = 2, \quad s(1) = 1, \quad s(2) = 2.$$

پس $\mathbb{Z}_3[x]/s(x)$ یک میدان متناهی با کلاس‌های هم‌ارزی به صورت $[ax+b]$ را به وجود می‌آورد که $a, b, \in \mathbb{Z}_3$. اگر چندجمله‌ای $f(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$ بر $s(x)$ تقسیم شوند، ۹ کلاس هم‌ارزی به صورت زیر به وجود می‌آیند:

$$[0],\ [1],\ [2],\ [x],\ [x+1],\ [x+2],\ [2x],\ [2x+1],\ [2x+2].$$

به جای تشکیل جدول کامل جمع و ضرب، تنها چند عمل را به عنوان نمونه انجام می‌دهیم.

$$\begin{aligned}[2x][x] &= [2x^2] = [2x^2+0] = [2x^2+(x^2+x+1)]\\ &= [3x^2+x+1] = [x+1]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[x+۱][x+۲] &= [x^۲+۳x+۲]=[x^۲+۲]\\ &= [x^۲+۲(x^۲+x+۲)]\\ &= [۲x]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[۲x+۲]^۲ &= [۴x^۲+۸x+۴]=[x^۲+۲x+۱]\\ &= [(-x-۲)+(۲x+۱)] \qquad x^۲\equiv -x-۲ \ (\text{پیمانه } s(x)) \ \text{زیرا}\\ &= [x-۱]=[x+۲]\end{aligned}$$

در مواردی، به جای نوشتن کلاس هم‌ارزی، فقط ضرایب چندجمله‌ای داخل کروشه را مشخص می‌کنیم. مثلا

$$[۲,۱]=[۲x+۱],\quad [۱,۲]=[x+۲],\quad [۱,۱]=[x+۱].$$

پس

$$\begin{aligned}[۲,۱][۱,۲] &= [۲x+۱][x+۲]=[۲x^۲+۵x+۲]\\ &= [۲x^۲+۲x+۲]=[۲(-x-۲)+۲x+۲]\\ &= [-۴+۲]=[-۲]=[۱]\end{aligned}$$

پس $[۲,۱]^{-۱}=[۱,۲]$.
در این میدان داریم:

$$[x]^۱=[x],[x]^۲=[۲x+۱],[x]^۳=[۲x+۲],[x]^۴=[۲],$$

$$[x]^۵=[۲x],[x]^۶=[x+۲],[x]^۷=[x+۱],[x]^۸=[۱]$$

پس مجموعه اعضای غیرصفر این میدان یک گروه دوری از مرتبه ۸ است.

تعریف ۴ : فرض کنید $(R,+,\times)$ یک حلقه بوده و n کوچک‌ترین عدد صحیح مثبتی است که برای هر $r\in R$ ، $nr=e$ (e صفر حلقه است). R را حلقه با مشخصه n گویند و می‌نویسند:

$$\mathrm{char}(R)=n$$

اگر عدد صحیحی وجود نداشته باشد که در این رابطه صدق کند، می‌گویند R با مشخصه صفر است.

مثال ۹.۷ حلقه $(\mathbb{Z}_۳,+,\times)$ دارای مشخصه ۳ است. حلقه $(\mathbb{Z}_۴,+,\times)$ دارای مشخصه ۴ است. در حالت کلی، حلقه $(\mathbb{Z}_n,+,\times)$ دارای مشخصه n است. در حالی که حلقه‌های $(\mathbb{Z},+,\times)$ و $(\mathbb{Q},+,\times)$ دارای مشخصه صفر هستند. توجه کنید که ممکن است حلقه‌ای نامتناهی بوده ولی دارای مشخصه مثبت باشد. به عنوان مثال، حلقه $\mathbb{Z}_۳[x]$ یک حلقه نامتناهی با مشخصه ۳ است.

قضیه ۵.۷ *فرض کنید $(F,+,\times)$ یک میدان با مشخصه مثبت است. در این صورت مشخصه آن یک عدد اول است.*

برهان: فرض کنید u عضو واحد میدان F است. اگر $\mathrm{char}(F)=n>۰$ و n اول نباشد داریم: $n=mk$؛ که در آن $m,k\in\mathbb{Z}^+$، $k<n$ و $m>۱$. بنا بر تعریف مشخصه، $nu=e$ که e صفر میدان است. پس $(mk)u=e$. ولی؛

$$(mk)u=\underbrace{(u+\cdots+u)}_{mk}=\underbrace{(u+\cdots+u)}_{m}\underbrace{(u+\cdots+u)}_{k}=mu.mk$$

چون F یک میدان است پس:

$$(mu)(mk) = e \Rightarrow mu = e \text{ یا } ku = e.$$

فرض کنیم $ku = e$؛ آنگاه به ازای هر $r \in F$ داریم:

$$kr = k(ur) = (ku)r = er = e,$$

که این با مشخصه بودن عدد n برای میدان F متناقض است. پس مشخصه میدان یک عدد اول است.

اگر F یک میدان متناهی با $|F| = m$ باشد، آنگاه برای هر $a \in F$؛ $ma = e$. زیرا $(F, +)$ یک گروه جمعی با مرتبه m است. در نتیجه، F دارای مشخصه مثبت است و طبق قضیه قبلی، این مشخصه یک عدد اول است و قضیه بعدی برقرار است.

قضیه ۶.۷ *هر میدان متناهی F از مرتبه p^t است که در آن p یک عدد اول و $t \in \mathbb{Z}^+$ است.*

با توجه به قضیه ۶.۷، میدان متناهی از مرتبه ... ,۱۲ ,۱۰ ,۶ وجود ندارد. همچنین برای هر عدد اول q و هر $t \in \mathbb{Z}^+$ فقط یک میدان از مرتبه q^t وجود دارد و هر دو میدان متناهی با مرتبه یکسان یکریخت هستند. هر میدانی از مرتبه q^t را با نماد $GF(q^t)$ نشان داده و آن را میدان گالوا[۲] گویند.
تمرین ۱.۷

۱. نشان دهید مجموعه اعداد صحیح $\{۰, ۲, ۴, ۶, ۸\}$ با عمل‌های جمع و ضرب با پیمانه ۱۰ یک میدان متناهی است.

۲. فرض کنید F یک میدان است. G را زیرمیدانی از F گویند هرگاه $G \subseteq F$ و تحت عمل‌های تعریف شده در F، G یک میدان است. نشان دهید G و F مشخصه‌های یکسانی دارند.

۳. یک میدان با ۸ عضو بسازید.

۴. نشان دهید دقیقا ۸ جمله تکین تحویل‌ناپذیر از درجه ۳ روی میدان $GF(۳)$ وجود دارد.

۵. با استفاده از چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر $x^۳ + ۲x + ۱$ روی میدان $\mathbb{Z}_۳$، یک میدان متناهی با ۲۷ عضو بسازید.

۶. با در نظر گرفتن چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر $x^۴ + x + ۱$ روی میدان $\mathbb{Z}_۲$، میدان $GF(۱۶)$ را بسازید.

۷. با در نظر گرفتن چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر $x^۳ + x + ۱$ روی میدان $\mathbb{Z}_۲$، میدان $GF(۸)$ را بسازید.

۸. نشان دهید چندجمله‌ای‌های داده شده در تمرینات ۵، ۶ و ۷ در میدان‌های متناظر تحویل‌ناپذیر هستند.

[۲] Évariste Galois (1811-1832)

۲.۷ ماتریس‌های هادامار

در این بخش با ماتریس‌های هادامار آشنا می‌شویم. این ماتریس‌ها در نظریه کدگذاری جبری، نظریه اطلاعات و فیزیک حائز اهمیت هستند. همچنین در مسایل گوناگونی مانند تعیین وزن مواد، ولتاژ یا مقاومت در مدارها و فرکانس طیف‌ها کاربرد دارند.

تعریف ۵ : ماتریس هادامار H_n از مرتبه n یک ماتریس $n \times n$ با عناصر ۱ و ۱− است به طوری که

$$H_n^T H_n = H_n H_n^T = nI.$$

مفهوم این تعریف این است که حاصل‌ضرب اسکالر هر دو سطر (هر دو ستون) متمایز از ماتریس H_n صفر است (بر هم عمودند).

مثال ۱۰.۷ ماتریس‌های هادامار از مرتبه‌های ۱، ۲، ۴ و ۸ به صورت زیر هستند:

$$H_۱ = [۱] \quad H_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix} \quad H_۴ = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ & -۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$H_۸ = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ & -۱ & ۱ & -۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ & -۱ & -۱ & ۱ & ۱ & -۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & -۱ & ۱ & ۱ & -۱ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & -۱ & -۱ & -۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ & -۱ & -۱ & ۱ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & -۱ & -۱ & -۱ & -۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & -۱ & ۱ & -۱ & ۱ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

دلیل این نام‌گذاری، این است که مقدار دترمینان چنین ماتریسی برای اولین بار توسط هادامار ارائه شد که عبارت است از:

$$\det H_n = n^{\frac{n}{۲}}.$$

چون تبدیل H_n به $-H_n$ تنها علامت سطرها و ستون‌ها را تغییر می‌دهد، پس این خاصیت H_n نیز تغییر نمی‌کند. می‌توان فرض کرد که سطر اول و ستون اول این ماتریس تنها شامل ۱ هستند. در چنین حالتی، ماتریس هادامار H_n را نرمال شده می‌گویند.

قضیه ۷.۷ (*هادامار: ۱۸۹۳*) *اگر یک ماتریس هادامار از مرتبه n وجود داشته باشد، آنگاه n برابر ۱ ، ۲ و یا مضربی از ۴ است.*

برهان: برای $n = ۱$ و $n = ۲$ ، ماتریس‌های هادامار موجود هستند (مثال ۱۰.۷ را نگاه کنید). فرض کنید $n \geq ۳$ و نیز فرض کنید سه سطر اول H_n به شکل زیر هستند:

$$\underbrace{\begin{matrix} ۱ & ۱ & \dots & ۱ \\ -۱ & -۱ & \dots & -۱ \\ -۱ & -۱ & \dots & -۱ \end{matrix}}_{\text{مرتبه } i} \; \underbrace{\begin{matrix} ۱ & ۱ & \dots & ۱ \\ -۱ & -۱ & \dots & -۱ \\ ۱ & ۱ & \dots & ۱ \end{matrix}}_{\text{مرتبه } j} \; \underbrace{\begin{matrix} ۱ & ۱ & \dots & ۱ \\ ۱ & ۱ & \dots & ۱ \\ -۱ & -۱ & \dots & -۱ \end{matrix}}_{\text{مرتبه } k} \; \underbrace{\begin{matrix} ۱ & ۱ & \dots & ۱ \\ ۱ & ۱ & \dots & ۱ \\ ۱ & ۱ & \dots & ۱ \end{matrix}}_{\text{مرتبه } l}$$

چون سطرهای H_n متفاوت هستند؛ داریم

$$\begin{aligned} i+j-k-l &= 0 \\ i-j+k-l &= 0 \\ i-j-k+l &= 0, \end{aligned}$$

که جواب $i=j=k=l$ را نتیجه می‌دهد. پس $n=4k$ و حکم ثابت می‌شود

در ادامه برهان دیگری را بیان می‌کنیم.

برهان: فرض کنیم x ، y و z سه سطر متفاوت در ماتریس هادامار H_n هستند. در این صورت

$$(x+y)(x+z) = |x|^2 + x.z + y.x + y.z = |x|^2.$$

اگر x و y را با هم جمع کنیم، $x+y$ مضربی از ۲ است. پس $(x+y)(x+z)$ مضرب ۴ بوده و بنابراین

$$(x+y)(x+z) = |x|^4 = 4k.$$

ولی $|x|^2$ مرتبه ماتریس H_n است. پس $n=4k$.

هنوز سوال‌های حل نشده‌ای در مورد ماتریس‌های هادامار وجود دارند. از جمله این که «آیا برای هر عدد طبیعی n، ماتریس هادامار از مرتبه $4n$ موجود است؟»

ماتریس‌های هادامار را می‌توان به روش ذیل تولید کرد. اگر H_n یک ماتریس هادامار از مرتبه n باشد، آنگاه

$$H_{2n} = \begin{bmatrix} H_n & H_n \\ H_n & -H_n \end{bmatrix},$$

یک ماتریس هادامار از مرتبه $2n$ است (چرا؟).

روش دیگر برای تولید ماتریس‌های هادامار، استفاده از میدان‌های متناهی است. برای این کار، عضو مربع در یک میدان متناهی را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۶ : عضو غیرصفر q از یک میدان را مربع گویند هرگاه معادله $x^2 = q$ در این میدان جواب داشته باشد.

مثال ۱۱.۷ در میدان متناهی $\mathbb{Z}_7$، عضوهای ۱، ۲ و ۴ مربع کامل هستند.

با توجه به تعریف ۶ فرض کنید F یک میدان متناهی از مرتبه q است. تابع χ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\chi(a) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } a \text{ مربع کامل باشد} \\ -1 & \text{اگر } a \text{ مربع کامل نباشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که در آن $a \in F$. قضیه بعدی را بدون اثبات بیان می‌کنیم. این قضیه روش کلی‌تری برای تولید ماتریس هادامار ارائه می‌کند.

قضیه ۸.۷ (*بدون اثبات*) *اگر* $F = \{a_۱, a_۲, \dots, a_{q-۱}\}$ *یک میدان متناهی،* p *یک عدد اول و* $q = p^n = ۴t - ۱$ *باشد، آنگاه ماتریس* $(q+۱) \times (q+۱)$ *به صورت زیر، یک ماتریس هادامار است.*

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & \dots & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & \chi(a_۱) & \dots & \chi(a_{q-۲}) & \chi(a_{q-۱}) \\ ۱ & \chi(a_{q-۱}) & -۱ & \dots & \chi(a_{q-۳}) & \chi(a_{q-۲}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ۱ & \chi(a_۱) & \chi(a_۲) & \dots & \chi(a_{q-۱}) & -۱ \end{bmatrix}$$

اصول کار در اثبات این قضیه به این صورت است که نشان دهیم حاصل ضرب داخلی هر دو سطر متمایز این ماتریس صفر است.

با شروع از $H_۱$ و به کارگیری قضیه ۸.۷، می‌توان ماتریس‌های هادامار از مرتبه ۲^k را به ازای هر $k \geq ۰$ ساخت. تاکنون کوچک‌ترین مرتبه‌ای که ماتریس هادامار برای آن ساخته نشده است ۲۶۸ است.

به عنوان کاربرد، مساله توزین ۴ ماده را مطرح می‌کنیم.

مثال ۱۲.۷ مساله توزین چهار ماده شیمیایی را با یک ترازوی دوکفه‌ای در نظر بگیرید. فرض کنید بدانیم برای هر توزین، خطایی برابر ε وجود دارد. ε یک متغیر تصادفی با میانگین صفر و واریانس $\sigma^۲$، مستقل از وزن مواد است. فرض کنید x_i وزن واقعی ماده i را نشان دهد و y_i وزنی است که بعد از توزین با ترازو به دست می‌آید و ε_i خطای متناظر است (مقدار ε_iها نامعلوم است). پس:

$$x_i = y_i + \varepsilon_i \qquad i = ۱, ۲, ۳, ۴.$$

برآورد وزن مجهول x_i عبارت است از:

$$\hat{x}_i = y_i = x_i - \varepsilon_i \qquad i = ۱, ۲, ۳, ۴,$$

که واریانس همه آنها $\sigma^۲$ است. به طور معادل می‌توان روش توزین زیر را مطرح کرد:

$$\begin{aligned} z_۱ &= x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + e_۱ \\ z_۲ &= x_۱ - x_۲ + x_۳ - x_۴ + e_۲ \\ z_۳ &= x_۱ + x_۲ - x_۳ - x_۴ + e_۳ \\ z_۴ &= x_۱ - x_۲ - x_۳ + x_۴ + e_۴, \end{aligned}$$

که در آنها، x_i ها نشان دهنده وزن واقعی مواد و e_i ها میزان خطاها هستند. مفهوم معادله اول این است که تمامی مواد را در یک کفه ترازو قرار داده و وزن آنها را اندازه می‌گیریم (مقدار این اندازه $z_۱$ و مقدار خطای این اندازه‌گیری $e_۱$ است). به همین ترتیب، مفهوم معادله دوم این است که مواد شماره ۱ و ۳ را در یک کفه و مواد ۲ و ۴ را در کفه دیگر ترازو قرار داده و برای ایجاد تعادل از وزنه $z_۲$ استفاده کنیم. خطای این اندازه گیری نیز $e_۲$ است. تعبیر مشابهی برای دو معادله دیگر وجود دارد.

ماتریس ضرایب در این دستگاه معادلات، همان ماتریس هادامار $H_۴$ است که بعد از حل این

دستگاه معادلات، برآورد وزن مواد به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\hat{x}_1 &= \frac{1}{4}(z_1+z_2+z_3+z_4)\\ \hat{x}_2 &= \frac{1}{4}(z_1-z_2+z_3-z_4)\\ \hat{x}_3 &= \frac{1}{4}(z_1+z_2-z_3-z_4)\\ \hat{x}_4 &= \frac{1}{4}(z_1-z_2-z_3+z_4),\end{aligned}$$

و در نتیجه:

$$\hat{x}_i = x_i + \frac{1}{4}(e_1+e_2+e_3+e_4).$$

واریانس این خطاها عبارت است از:

$$\varepsilon_1 = (\hat{x}_1 - x_1)^2 = \frac{\sigma^2}{4} = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4. \qquad (1.7)$$

این رابطه بر این فرض استوار است که خطاهای e_i در iامین آزمایش، مستقل از کیفیت اندازه‌گیری است. یعنی باید وزن مواد در مقایسه با جرم ترازو ملموس باشد. همچنین فرض بر این است که میانگین e_i ها صفر و انحراف معیار آنها σ بوده و میانگین e_ie_jها نیز صفر است.

هاتلینگ[3] ثابت کرد که ماتریس‌های هادامار بهترین روش توزین مواد با ترازوی شیمیایی را در اختیار می‌گذارند [۱۷]. یعنی این ماتریس‌ها (مطابق مثال ۱۲.۷) روش توزینی را ایجاد می‌کنند که اگر n ماده موجود بوده و از یک ماتریس هادامار از مرتبه n استفاده شود، آنگاه واریانس برای هر متغیر با مضرب n کاهش می‌یابد (معادله ۱.۷ را نگاه کنید).

کاربرد دیگری از ماتریس‌های هادامار در طیف‌سنجی است. سلونه[4] چنین کاربردی را ارائه کرد. ماتریس‌هایی که برای این کار استفاده می‌شوند از روی ماتریس‌های هادامار ساخته شده و Sـ ماتریس نام‌گذاری شده‌اند [۳۳]. در اینجا می‌خواهیم یک طیف پرتو نوری اندازه‌گیری کنیم. به جای آن که n ماده شیمیایی مختلف توزین شوند، یک پرتو نوری باید به n مولفه با طول موج‌های مختلف تفکیک شده و شدت هر مولفه مشخص شود. این کار با یک طیف‌سنج که چند خروجی دارد انجام می‌گیرد. Sـ ماتریسی که برای چنین کاری استفاده می‌شود، با یک ماتریس هادامار نرمال شده H_n از مرتبه n آغاز می‌شود. Sـ ماتریس از مرتبه $n-1$ یا S_{n-1}، یک ماتریس $(n-1)\times(n-1)$ با عناصر صفر و یک است که با حذف سطر اول و ستون اول از ماتریس H_n و تبدیل یک‌ها به صفر و -1 ها به یک به دست می‌آید.

مثال ۱۳.۷ ماتریس‌های S_1 ، S_3 و S_7 به صورت زیر هستند:

$$S_1 = [1] \qquad S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix} \qquad S_7 = \begin{bmatrix} 1&0&1&0&1&0&1\\ 0&1&1&0&0&1&1\\ 1&1&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&1&1&1&1\\ 1&0&1&1&0&1&0\\ 0&1&1&1&1&0&0\\ 1&1&0&1&0&0&1\end{bmatrix}$$

[3] Harold Hotelling (1895 –1973)

[4] Neil J. A. Sloane

لم ۱ *فرض کنید S_n یک Sـ ماتریس از مرتبه n است. در این صورت S_n در روابط زیر صدق می‌کند:*

۱. $S_nS_n^T = \frac{۱}{۴}(n+۱)(I_n+J_n)$

۲. $S_nJ_n = J_nS_n = \frac{۱}{۲}(n+۱)J_n$

۳. $$S_n^{-۱} = \frac{۲}{n+۱}(۲S_n^T - J_n)$$

که در آن J_n یک ماتریس $n \times n$ است که تمامی مولفه‌های آن ۱ است.

برقراری خاصیت‌های ۱ و ۲ برای هر ماتریس دلخواه $n \times n$ با مولفه‌های صفر و ۱ تا آن را به یک S ـ ماتریس تبدیل می‌کند. Sـ ماتریس‌های دوری، ماتریس‌هایی هستند که در آنها هر سطر از انتقال دوری به چپ یا راست مولفه‌های سطر قبلی حاصل می‌شود. به عنوان مثال ماتریس بعدی یک Sـ ماتریس دوری است:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

S ـ ماتریس‌های دوری در ثبات‌ها کاربرد دارند و در این مورد می‌توان به کتاب‌های تخصصی‌تر مراجعه کرد.

ضرب کرونکر ماتریس‌ها

اگر $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$ دو ماتریس مربع به ترتیب از مرتبه n و m باشند، حاصل‌ضرب کرونکر A و B که با نماد $A \otimes B$ نمایش داده می‌شود، ماتریس $mn \times mn$ است که به صورت زیر ایجاد می‌شود:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{۱۱}B & a_{۱۲}B & \dots & a_{۱m}B \\ a_{۲۱}B & a_{۲۲}B & \dots & a_{۲m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m۱}B & a_{m۲}B & \dots & a_{mm}B \end{bmatrix}$$

به عنوان مثال با فرض $A = B = H_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ داریم

$$H_۲ \otimes H_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ & -۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}.$$

قضیه ۹.۷ *اگر A و B دو ماتریس هادامار به ترتیب از مرتبه‌ای m و n باشند، آنگاه $A \otimes B$ یک ماتریس هادامار از مرتبه mn است.*

برهان: قرار دهید $C = A \otimes B$. بدیهی است که C ماتریسی است که اعضای آن ۱+ و ۱− هستند و داریم:

$$CC^T = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mm}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{m1}B \\ a_{12}B & a_{22}B & \dots & a_{m2}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m}B & a_{m2}B & \dots & a_{mm}B \end{bmatrix}$$

عضو (i,j) در ماتریس CC^T برابر است با

$$\begin{aligned} (CC^T)_{ij} &= (a_{i1}B, \dots a_{im}B)(a_{j1}B^T, \dots, a_{jm}B^T) \\ &= a_{i1}a_{j1}BB^T + \dots + a_{im}a_{jm}BB^T \\ &= \begin{cases} 0 & i \neq j \\ mnI_n & i = j \end{cases} \end{aligned}$$

در این صورت

$$CC^T = \begin{bmatrix} mnI_n & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & mnI_n \end{bmatrix}$$

به این ترتیب حکم ثابت می‌شود.

تمرین ۲.۷

۱. فرض کنید $a_1, a_2, \dots, a_n$ نشان دهنده m، $n = 2^m$ تایی دودویی هستند. نشان دهید ماتریس $H = (h_{ij})$ یک ماتریس هادامار از مرتبه n است که در آن $h_{ij} = (-1)^{a_i - a_j}$.

۲. ماتریس هادامار از مرتبه $n = 8$ را با استفاده از قضیه ۸.۷ بسازید.

۳. طرح توزین برای ۸ ماده شیمیایی را مطابق با آنچه در مثال ۱۲.۷ انجام شد، بسازید.

۴. دو Sـ ماتریس دیگر علاوه بر آن که در درس آمده است بسازید.

۵. لم ۱ را ثابت کنید.

۶. نشان دهید اگر H_n یک ماتریس هادامار از مرتبه n باشد آنگاه $\det H_n = n^{\frac{n}{2}}$.

۷. ماتریس هادامار از مرتبه ۱۲ را بسازید.

۳.۷ طرح‌های بلوکی

فرض کنید خانواده‌ای به اسامی a،b،c،d،e برای بازدید موزه‌ای به مدت هفت روز، هر روز سه بلیط در اختیار دارد. آیا می‌توان برنامه‌ای تنظیم کرد که افراد خانواده به دفعات مساوی از موزه بازدید کنند؟ می‌توان با تجسس برنامه‌هایی را تنظیم کرد. ولی اگر تعداد اعضای خانواده زیاد باشد و یا شرایط بیشتری مطرح شود، ارائه برنامه به آسانی ممکن نیست. مثلا اگر این خانواده روزانه چهار بلیط در اختیار داشته باشند، ارائه برنامه مناسب غیرممکن است. چنین مثال‌هایی، ما را به **طرح‌های بلوکی** هدایت می‌کنند.

تعریف ۷ : یک طرح بلوکی ناقص متوازن ۵ BIBD با پارامترهای (v, b, r, k, λ)، زوج (P, B) است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱. P مجموعه‌ای با v عضو است.

۲. $B = \{B_1, B_2, \dots, B_b\}$ زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{P}(P)$ با b عضو است.

۳. هر B_i دقیقا k عضو دارد که $k < v$.

۴. هر زوج نامرتب $\{p, q\}$ با $p, q \in P$ و $p \neq q$ دقیقا در λ عضو از B قراردارد.

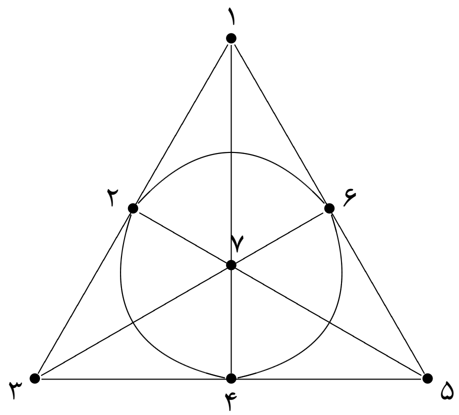
۵. هر $a \in P$ دقیقا در r مجموعه از B واقع است. چنین BIBD را یک (v, b, r, k, λ)ـ پیکربندی یا **پیکربندی تاکتیکی** یا **طرح** گویند. کلمه متوازن نشان دهنده این است که هر زوج، دقیقاً در تعداد یکسانی از بلوک‌ها قرار دارد و کلمه ناقص به این معنی است که تعداد اعضای هر بلوک کمتر از تعداد اعضای P است. یک BIBD را **متقارن** گویند هرگاه $v = b$.

مجموعه‌های $B_1, B_2, \dots, B_b$ را بلوک‌های BIBD می‌گویند.

مثال ۱۴.۷ فرض کنید:

$$\begin{aligned} P &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \\ B &= \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \{5, 6, 1\}, \{2, 4, 6\}, \{1, 4, 7\}, \{3, 6, 7\}, \{2, 5, 7\}\}. \end{aligned}$$

(P, B) تعریف شده در این مثال یک $(7, 7, 3, 3, 1)$ـ پیکربندی است. تعداد اعضای P (راس‌ها) و تعداد اعضای B (بلوک‌ها) هر دو هفت است (پس این طرح متقارن است). همچنین هر بلوک سه عضو دارد و هر عضو دقیقاً در سه بلوک واقع است و هر دو بلوک دقیقاً در یک راس مشترک هستند. این طرح را **هندسه فانو**۶ گویند (شکل بعدی را نگاه کنید).



همانند آنچه در فصل چهارم در نظریه گراف بیان شد؛ برای هر طرح نیز نمایش ماتریسی وجود دارد و ماتریس وقوع قابل تعریف است. در این نمایش، هر سطر نشان دهنده شماره بلوک و هر ستون نشان

Balanced Incomplete Block Design[5]
Fano's geometry[6]

دهنده شماره راس بوده و مولفه متناظر ۱ است هرگاه راس متناظر در بلوک مربوطه واقع باشد. در غیر این صورت، مولفه متناظر صفر است.

در قضیه‌های بعدی بخشی از خواص طرح‌های بلوکی را ارائه می‌کنیم.

قضیه ۱۰.۷ *فرض کنید A ماتریس وقوع یک (v, b, r, k, λ) ـ طرح است. آنگاه روابط زیر برقرار هستند:*

$$\begin{aligned} AA^T &= (r-\lambda)I_v + \lambda J_{v\times v} \\ \det(AA^T) &= [r+(v-۱)\lambda](r-\lambda)^{v-۱} \\ AJ_{b\times b} &= rJ_{v\times b} \\ J_{v\times v}A &= kJ_{v\times b} \end{aligned}$$

که در آن $J_{m\times n}$ یک ماتریس $m \times n$ با تمامی مولفه‌های ۱ و I_n ماتریس واحد $n \times n$ است.

قضیه ۱۱.۷ *شرط‌های زیر برای وجود یک* BIBD با پارامترهای (v, b, r, k, λ) لازم هستند.

$$\begin{aligned} bk &= rv \\ r(k-۱) &= \lambda(v-۱) \\ b &\geq v \end{aligned}$$

مثال ۱۵.۷ طرح زیر از مجموعه $\{۱, ۲, \ldots, ۹\}$ با پارامترهای

$$v = ۹, \quad b = ۱۲, \quad , r = ۴, \quad , k = ۳, \quad , \lambda = ۱,$$

است که مجموعه بلوک‌های B به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} B \;=\; & \{\{۱,۲,۳\},\{۴,۵,۶\},\{۷,۸,۹\},\{۱,۴,۷\},\{۲,۵,۹\},\{۳,۶,۸\}, \\ & \{۱,۵,۸\},\{۲,۶,۷\},\{۳,۴,۹\},\{۱,۶,۹\},\{۲,۴,۸\},\{۳,۵,۷\}\}. \end{aligned}$$

مثال ۱۶.۷ طرح زیر با پارامترهای $\lambda = ۲$، $r = k = ۵$ و $v = b = ۱۱$ است:

$$P = \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۱\},$$

$$\begin{aligned} B \;=\; & \{\{۱,۳,۴,۵,۹\},\{۲,۴,۵,۶,۱۰\},\{۳,۵,۶,۷,۱۱\}\{۴,۶,۷,۸,۱\}, \\ & \{۵,۷,۸,۹,۲\},\{۶,۸,۹,۱۰,۳\},\{۷,۹,۱۰,۱۱,۴\},\{۸,۱۰,۱۱,۱,۵\}, \\ & \{۹,۱۱,۲,۶,۱\},\{۱۰,۱,۲,۳,۷\},\{۱۱,۲,۳,۴,۸\}\}. \end{aligned}$$

طرح‌های بلوکی را می‌توان با استفاده از ماتریس‌های هادامار به وجود آورد. الگوریتم مناسبی برای این کار وجود دارد. با این الگوریتم طرح‌های متقارن تولید می‌شوند.

الگوریتم ۲.۷ ماتریس‌های هادامار از مرتبه $n = ۴t$ را در نظر بگیرید و گام‌های بعدی را به ترتیب اجرا کنید:

گام اول سطر و ستون اول ماتریس هادامار را حذف کنید.

گام دوم در ماتریس باقیمانده تمامی مولفه‌های -۱ را به صفر تبدیل کنید.

گام سوم سطرهای ماتریس به دست آمده را از ۱ تا $n-۱$ شماره‌گذاری کنید.

گام چهارم ستون‌های ماتریس به دست آمده را از $B_۱$ تا $B_{n-۱}$ شماره‌گذاری کنید.

گام پنجم عضو B_j از مجموعه بلوک‌های B را به صورت زیر بسازید:

$$i \in B_j \Leftrightarrow A_{ij} = ۱,$$

که در آن $A = (a_{ij})$ ماتریس باقیمانده در گام اول است.

این الگوریتم را روی مثال ساده‌ای اجرا می‌کنیم.

مثال ۱۷.۷ ماتریس هادامار از مرتبه ۸ را در نظر بگیرید. بعد از انجام گام‌های اول تا چهارم این الگوریتم، ماتریس A به صورت زیر به وجود می‌آید.

$$A = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccccccc} B_۱ & B_۲ & B_۳ & B_۴ & B_۵ & B_۶ & B_۷ \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccccccc} ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \end{array}\right] & \begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \\ ۵ \\ ۶ \\ ۷ \end{array} \end{array}$$

بنابراین با توجه به گام پنجم الگوریتم، بلوک‌های این طرح عبارتند از:

$$B = \{\{۳,۵,۶\},\{۲,۴,۶\},\{۱,۴,۵\},\{۳,۴,۷\},\{۱,۲,۳\},\{۲,۵,۷\},\{۱,۶,۷\}\}.$$

برای هر طرح، مکمل طرح به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۸ : اگر در ماتریس وقوع یک طرح بلوکی، همه مولفه‌های ۱ را به صفر و همه مولفه‌های صفر را به یک تبدیل کنیم؛ ماتریسی به وجود می‌آید که یک ماتریس وقوع برای یک طرح بلوکی دیگر است. این طرح بلوکی را **مکمل طرح** بلوکی اول گویند. می‌توان نشان داد:

$$b' = b, \quad v' = v, \quad k' = v - k, \quad \lambda' = b - ۲r + \lambda, \quad r' = b - r.$$

تحقیق طرح بودن مکمل یک طرح با پارامترهای فوق، به عنوان تمرین واگذار می‌شود.

مثال ۱۸.۷ ماتریس وقوع برای طرح ارائه شده در مثال قبلی را در نظر بگیرید. با توجه به تعریف ۸، A'، ماتریس وقوع مکمل طرح به صورت زیر است:

$$A' = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}.$$

در ادامه این بخش، کاربردی از طرح‌های بلوکی در طراحی آزمایش‌ها را ارائه می‌دهیم.

مثال ۱۹.۷ فرض کنید ۱۳ نوع کود مختلف داریم و می‌خواهیم تاثیر آنها را روی محصول خاصی بدانیم. برای این منظور ۱۳ قطعه زمین مختلف برای این محصول زیر کشت برده‌ایم به طوری که در هر قطعه از زمین، ترکیبی از چهار نوع کود مختلف را آزمایش کرده و هر نوع کود در چهار قطعه زمین مختلف استفاده شود و هر دو نوع کود دلخواه، فقط یک بار در کنار هم استفاده شوند. برای انجام این کار، کودها را از ۱ تا ۱۳ شماره‌گذاری کرده و به عنوان راس‌های یک طرح در نظر می‌گیریم و انواع کودهایی را که در یک قطعه از زمین استفاده می‌شوند، به عنوان بلوک‌های طرح فرض می‌کنیم و از یک (۱۳, ۱۳, ۴, ۴, ۱)ـ طرح استفاده می‌کنیم. بلوک‌ها و راس‌ها در جدول بعدی خلاصه شده‌اند.

قطعه زمین	نوع کود			
۱	۱	۲	۴	۱۰
۲	۲	۳	۵	۱۱
۳	۳	۴	۶	۱۲
۴	۴	۵	۷	۱۳
۵	۵	۶	۸	۱
۶	۶	۷	۹	۲
۷	۷	۸	۱۰	۳
۸	۸	۹	۱۱	۴
۹	۹	۱۰	۱۲	۵
۱۰	۱۰	۱۱	۱۳	۶
۱۱	۱۱	۱۲	۱	۷
۱۲	۱۲	۱۳	۲	۸
۱۳	۱۳	۱	۳	۹

در مورد تعداد طرح‌ها با λ های مختلف، آخرین اطلاعات به شرح زیر است:

۱. اگر $\lambda =$ ۱ و طرح متقارن باشد، آنگاه طرح بلوکی همان صفحه تصویری متناهی است (بخش بعدی را نگاه کنید). یک کلاس نامتناهی از این طرح وجود دارد. برای هیچ λ ی دیگری، وجود تعداد نامتناهی از طرح‌های بلوکی معلوم نیست.

۲. برای $\lambda =$ ۲، طرح‌های متقارن

(۷, ۷, ۴, ۴, ۲), (۱۱, ۱۱, ۵, ۵, ۲), (۱۶, ۱۶, ۶, ۶, ۲), (۳۷, ۳۷, ۹, ۹, ۲)

در سال ۱۹۳۸ توسط فیشر[۷] و یتس[۸] ارائه شده‌اند. تنها طرح متقارن شناخته شده دیگر با $\lambda =$ ۲، یعنی (۷۹, ۷۹, ۱۳, ۱۳, ۲)ـ طرح در سال ۱۹۷۰ توسط آرچباچر[۹] ارائه شد.

۳. برای $\lambda =$ ۳، طرح‌های متقارن (۱۱, ۱۱, ۶, ۶, ۳) و (۱۵, ۱۵, ۷, ۷, ۳) در سال ۱۹۳۸ توسط فیشر و یتس ارائه شدند. طرح‌های (۲۵, ۲۵, ۹, ۹, ۳) و (۳۱, ۳۱, ۱۰, ۱۰, ۳) در سال‌های ۱۹۴۴ و ۱۹۴۶ توسط بهاتاچاریا[۱۰] و طرح (۴۵, ۴۵, ۱۲, ۱۲, ۳) به طور مستقل در سال ۱۹۶۲ توسط شیرخنده[۱۱] و در سال ۱۹۶۳ توسط تاکوچی[۱۲] ارائه شد.

Fisher[۷]
Yates[۸]
Archbacher[۹]
Bhattacharya[۱۰]
Shirkhande[۱۱]
Takochi[۱۲]

سوال‌های زیادی در مورد طرح‌های بلوکی وجود دارند که هنوز پاسخی برای آنها داده نشده است. از جمله:

۱. آیا برای هر (v, k, λ) داده شده یک طرح بلوکی وجود دارد؟

۲. آیا هر طرحی را می‌توان در یک جدول مانند آنچه در مثال ۱۹.۷ ارائه شده است، چنان قرار داد که ستون‌های یک جایگشت از v عضو P باشند.

تمرین ۳.۷

۱. قضیه ۱۰.۷ را ثابت کنید.

۲. قضیه ۱۱.۷ را ثابت کنید.

۳. نشان دهید مکمل هر طرح، خود نیز یک طرح است. (راهنمایی: کافی است ثابت کنید پارامترهای آن در شرایط قضیه ۱۱.۷ صدق می‌کنند.)

۴. نشان دهید اگر در یک طرح بلوکی متقارن، یک بلوک را حذف کرده و تمامی عناصر واقع در آن بلوک را نیز از سایر بلوک‌ها حذف کنیم، حاصل یک طرح بلوکی است. این طرح بلوکی را **طرح بلوکی باقیمانده** می‌نامند.

۵. با استفاده از الگوریتم ۲.۷، طرح متقارنی را از روی $H_{۱۶}$ نوشته و پارامترهای آن را مشخص کنید.

۶. طرح مکمل برای طرح بلوکی به دست آمده در تمرین قبلی را نوشته و پارامترهای آن را مشخص کنید.

۷. یک طرح بلوکی با پارامترهای $\lambda = ۲$، $k = ۳$ و $v = ۶$ بسازید.

۸. یک طرح بلوکی با پارامترهای $(۸, ۴, ۳)$ بسازید.

۹. آیا می‌توان عکس تمرین ۴ را انجام داد و یک طرح بلوکی جدید به دست آورد؟ پاسخ خود را روی طرح $(۸, ۸, ۴, ۴, ۳)$ امتحان کنید.

۴.۷ مربع لاتین

یک آرایه $n \times n$ از n عدد متمایز $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ را یک **مربع لاتین** گویند هرگاه در هیچ سطر و ستون عدد تکراری وجود نداشته باشد.

مثال ۲۰.۷ دو مربع لاتین برای مجموعه $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۴ & ۳ \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۱ & ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

مربع لاتین تاریخچه‌ای طولانی دارد و حداقل به دوران اعتلای علوم اسلامی در قرن ۱۲ میلادی برمی‌گردد که می‌خواستند «طلسم» بسازند. ابوالعبای البونی درباره مربع لاتین مطالبی را نوشته و برای نمونه مربع لاتین ۴ $\times$ ۴ را از حروف کلمه «الله» ساخت. مورد دیگر تاریخی عبارت از قراردادن ۱۶ کارت تصویردار در یک سری کارت است که آنها را در یک آرایه ۴ در ۴ قرار دهیم به طوری که هر تصویر و هر شکل در هر سطر و ستون فقط یک بار دیده شود. بعدها در سال ۱۹۷۷ مساله مشابهی توسط لئونارد اویلر به نام «مساله ۳۶ افسر» مطرح گردید که این مساله تا اوایل قرن بیستم حل نشده بود. وجود جواب برای این مساله به وجود دو مربع لاتین متعامد ۶ $\times$ ۶ برمی‌گردد که او به درستی به عدم وجود جواب برای مساله پی برده بود. در سال ۱۹۳۰ مجددا مربعات لاتین در توسیع نظریه گروه‌ها و تعریف «نیمگروه» توسط آرتور کایلی مطرح گردید. در همان زمان مربعات لاتین نقش مهمی را در پایه‌ریزی هندسه متناهی ایفا کردند. همچنین در طراحی آزمایشات آماری نیز کاربردی توسط فیشر مطرح گردید.

اویلر برای اولین بار در مطالعه مربع‌های لاتین از حروف لاتین استفاده کرد و به همین دلیل آنها را مربع لاتین می‌گویند و برای دو مربع لاتین متمایز از حروف یونانی و لاتین استفاده کرد. بازی محبوب «سودوکو»[۱۳] حالت خاصی از مربع لاتین است. شرط اضافی دیگری علاوه بر شرط مربع لاتین بودن در این بازی وجود دارد و آن این است که در ۹ مربع ۳ $\times$ ۳، باید اعداد ۱ تا ۹ قرار گیرد (در ویرایش استاندارد آن). بازی دیگری که با مربعات لاتین ارتباط دارد بازی «کن کن» [۱۴] یا «کن دوکو»[۱۵] است.

واضح است که برای هر n، دست کم یک مربع لاتین از مرتبه n وجود دارد. این مربع لاتین را می‌توان با انتقال دوری هر سطر و قرار دادن جایگشت جدید در سطر جدید تولید کرد:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۱ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}.$$

دو مربع لاتین (a_{ij}) و (b_{ij}) را **دو به دو متعامد** گویند هرگاه در زوج‌های (a_{ij}, b_{ij}) تکرار وجود نداشته باشد. به عنوان نمونه، مربع‌های لاتین ارائه شده در مثال ۲۰.۷ متعامد هستند. زیرا اگر دو مربع را روی هم قرار دهیم در زوج‌های به دست آمده تکراری وجود ندارد. سوال مهمی در اینجا مطرح می‌گردد.

«برای هر n داده شده چند مربع لاتین دو به دو متعامد وجود دارد؟»

پاسخ این سوال هنوز به طور کامل مشخص نشده است. قضیه بعدی کرانی برای این مقدار مشخص می‌کند.

قضیه ۱۲.۷ *برای هر عدد صحیح و مثبت n، حداکثر $n-۱$ مربع لاتین دو به دو متعامد وجود دارد.*

برهان: فرض کنید سطر اول همه مربع‌های لاتین دو به دو متعامد از مرتبه n به صورت

$$۱ \ ۲ \ ۳ \ \cdots \ n$$

[۱۳] Sudoku
[۱۴] KenKen
[۱۵] Kendoku

است، در غیر این صورت، با یک تبدیل می‌توان سطر اول را به این صورت نوشت. حال اگر عضو $a_{۲۱}$ را در نظر بگیریم، در همه مربع‌ها $a_{۲۱} \neq ۱$ ؛ پس حداکثر امکان انتخاب برای $a_{۲۱}$، همان $n-۱$ است و بنابراین حداکثر $n-۱$ مربع لاتین از این نوع موجود است.

تعریف ۹ : عدد n را **کامل** گویند هرگاه $n-۱$ مربع لاتین دو به دو متعامد از مرتبه n موجود باشد.

هنوز به طور قطع مشخص نشده است که چه اعدادی کامل هستند، ولی قضیه زیر برای حالت خاصی برقرار است. این خاصیت در سال ۱۹۳۸ توسط بس[۱۶] و در سال ۱۹۳۹ توسط ترمس[۱۷] به طور مستقل شناخته شد.

قضیه ۱۳.۷ *اگر $n = p^\alpha$ که در آن p یک عدد اول و α یک عدد صحیح باشد، آنگاه n کامل است.*

برهان: بنا بر قضیه ای از جبر، میدان متناهی از مرتبه p^α وجود دارد. اعضای این میدان را به صورت زیر نشان می دهیم.

$$GF(p^\alpha) = \{a_۰ = ۰, a_۱ = ۱, a_۲ = ۲, \ldots, a_{p^\alpha - ۱} = p^\alpha - ۱\}.$$

حال مربع‌های لاتین را به صورت زیر می‌سازیم:

$$A_k = (a_{ij}^{(k)}) \qquad i, j, k = ۰, ۱, ۲, \ldots, n-۱.$$

A یک مربع لاتین است. زیرا اگر در ستون j ام دو مولفه i ام و i' ام با هم مساوی باشند آنگاه

$$a_{ij}^k = a_{i'j}^k.$$

در نتیجه $a_k a_i + a_j = a_k a_{i'} + a_j$ و بنابراین $a_k a_i = a_k a_{i'}$. چون a_k معکوس‌پذیر است، پس $a_i = a_{i'}$ و بنابراین $i = i'$.

به همین ترتیب اگر دو مولفه از سطر iام با هم مساوی باشند آنگاه داریم:

$$a_k a_i + a_j = a_k a_i + a_{j'},$$

که از آن برابری $j = j'$ را نتیجه می‌گیریم.

حال نشان می‌دهیم که مربع‌های لاتین A_k برای k های متمایز متعامد هستند. اگر زوج‌های

$$(a_{ij}^k, a_{ij}^{k'}), \quad (a_{ij}^k, a_{i'j'}^{k'}),$$

مساوی باشند، داریم:

$$\begin{aligned} a_k a_i + a_j &= a_k a_{i'} + a_{j'}, \\ a_{k'} a_i + a_j &= a_{k'} a_{i'} + a_{j'}, \end{aligned}$$

نتیجه می‌شود:

$$a_i(a_k - a_{k'}) = a_{i'}(a_k - a_{k'}).$$

[۱۶] Bose
[۱۷] Teremese

چون $a_k - a_{k'}$ معکوس‌پذیر است، پس $a_i = a_{i'}$ و یا $i = i'$. به همین ترتیب ثابت می‌شود $j = j'$ (چرا؟). یعنی A_k و $A_{k'}$ متعامد هستند. در نتیجه $n = p^\alpha$ یک عدد کامل است.

در حالت کلی، فرض کنید $A = (a_{ij})$ یک مربع لاتین $n \times n$ است. اگر با تبدیلی از $\{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$، آن را به مربع لاتین دیگری تبدیل کنیم، این دو مربع لاتین الزاماً متعامد نیستند.

مثال ۲۱.۷ برای $n = ۴ = ۲^۲$، سه مربع لاتین دو به دو متعامد از مرتبه ۴ وجود دارند.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۱ & ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۴ & ۳ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

قضیه ۱۴.۷ *وجود k مربع لاتین دو به دو متعامد معادل است با وجود یک آرایه $(k + ۲) \times n^۲$ مانند $A = (a_{ij})$، طوری که هر دو ستون A با هم، تمامی $n^۲$ زوج مرتب را به وجود می‌آورند.*

درستی این قضیه را در یک مثال تحقیق می‌کنیم. برای $n = ۳$ دو مربع لاتین دو به دو متعامد را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

حال آرایه ۴×۹ را به صورت زیر می‌سازیم. ستون اول و دوم را مطابق ماتریس (۲.۷) می‌نویسیم. ستون‌های بعدی هر کدام به ترتیب سطرهای مربع لاتین متعامد داده شده هستند. هر ستون دلخواه از این آرایه، تمامی زوج‌های مرتب روی مجموعه $\{۱, ۲, ۳\}$ را مشخص می‌کنند. مقایسه دو ستون اول و دوم و مقایسه ستون‌های سوم و چهارم آسان است. ستون سوم را با ستون اول مقایسه کنید. چون در سطرهای مربع‌های لاتین تکرار وجود ندارد، پس در این دو ستون زوج تکراری نیز وجود ندارد. مقایسه سایر ستون‌ها نیز به همین ترتیب انجام می‌گیرد.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۲ & ۲ \\ ۱ & ۳ & ۳ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۲ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ & ۳ \\ ۳ & ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \qquad (۲.۷)$$

حال اگر چنین آرایه‌ای موجود باشد، می‌توان مربع‌های لاتین متعامد را از روی آن مشخص کرد. دو ستون اول آرایه داده شده را با جابجایی سطرها، مانند آرایه A مرتب کنید. آنگاه مربع‌های لاتین از ستون‌های A مشخص می‌شوند. اثبات قضیه در حالت کلی نیز به همین ترتیب است.

قضیه ۱۵.۷ *اگر k مربع لاتین دو به دو متعامد از مرتبه n و k مربع لاتین متعامد از مرتبه n' موجود باشند، آنگاه حداقل k مربع لاتین از مرتبه nn' وجود دارد.*

برهان: چون k مربع لاتین از مرتبه n وجود دارد، پس آرایه $A_{n^۲\times(k+۲)}$ با مولفه‌هایی از $\{۱,۲,۳,\ldots,n\}$ وجود دارد. به همین ترتیب چون k مربع لاتین از مرتبه n' وجود دارد، پس آرایه $A'_{n'^۲\times(k+۲)}$ با مولفه‌هایی از $\{۱,۲,۳,\ldots,n'\}$ وجود دارد. حال آرایه جدید $\bar{A}$ را به صورت زیر می‌سازیم:

فرض کنید سطر i ام ماتریس A به صورت

$$(a_{i۱},a_{i۲},\ldots,a_{i(k+۲)}),$$

و سطر j ام A' به صورت

$$(a'_{j۱},a'_{j۲},\ldots,a'_{j(k+۲)}),$$

هستند. در این صورت سطر ijـ ام ماتریس $\bar{A}$ را به صورت زیر قرار می‌دهیم:

$$((a_{i۱},a'_{j۱}),(a_{i۲},a'_{j۲}),\ldots,(a_{i(k+۲)},a'_{j(k+۲)})).$$

بدیهی است که $\bar{A}$ آرایه‌ای از مرتبه $n^۲n'^۲\times(k+۲)$ با مولفه‌های

$$\{(۱,۱),(۱,۲),\ldots,(n,n')\},$$

بوده و همان آرایه مورد نظر است (چرا؟).

قضیه ۱۶.۷ *فرض کنید $n=p_۱^{\alpha_۱}p_۲^{\alpha_۲}\cdots p_k^{\alpha_k}$ تجزیه n به اعداد اول است $(p_i\neq p_j)$. در این صورت حداقل $m=\min\{p_i^{\alpha_i}-۱|۱\leq i\leq k\}$ مربع لاتین دو به دو متعامد از مرتبه n موجود است.*

برهان: از قضیه‌های ۱۳.۷ و ۱۵.۷ نتیجه می‌شود.

نتیجه ۱۷ *اگر $n=۴k$ و یا n فرد باشد، آنگاه حداقل دو مربع لاتین از مرتبه n موجود است.*

در سال ۱۹۴۹، بروک[۱۸] و ریستر[۱۹] نتیجه زیر را ثابت کردند.

قضیه ۱۷.۷ *هرگاه برای $n\geq ۳$، (پیمانه۴) ۱یا۲ $=n$ و عدد n را نتوان به صورت مجموع دو مجذور صحیح نوشت $(n\neq a^۲+b^۲)$، آنگاه n کامل نیست.*

در ادامه این بخش، کاربردهایی از مربع لاتین ارائه می‌شود.

مثال ۲۲.۷ فرض کنید می‌خواهیم n کود مختلف را روی n نوع گیاه مختلف آزمایش کنیم. زمینی به شکل مربع $n\times n$ در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم در هر ردیف و هر ستون هر کود با هر گیاهی آزمایش شود. اگر دو مربع لاتین متعامد از مرتبه n موجود باشد، چنین آزمایشی امکان‌پذیر است.

مثال ۲۳.۷ فرض کنید ۵ کارگر، ۵ روز از هفته را کار می‌کنند و ۵ نوع ماشین نخریسی موجود است. آیا امکان دارد هر کارگر در هر روز با یک ماشین متمایز از روزهای دیگر کار کند؟ جواب این سوال مثبت است. زیرا کافی است یک مربع لاتین متعامد به صورت زیر در نظر گرفته شود:

---
[۱۸] Bruck
[۱۹] Ryster

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
شنبه	۰	۱	۲	۳	۴
یکشنبه	۴	۰	۱	۲	۳
دوشنبه	۳	۴	۰	۱	۲
سه‌شنبه	۲	۳	۴	۰	۱
چهارشنبه	۱	۲	۳	۴	۰

اعداد نوشته شده در داخل مربع، شماره کارگری است که در روز خاصی با ماشین O_i کار می‌کند. حال اگر ۵ نوع الیاف مختلف نیز داشته باشیم و بخواهیم این کارگران الیاف را در هر نوع ماشینی استفاده کنند، اگر الیاف مختلف را با y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 نشان دهیم و کارگران را با شماره‌های $1, 2, 3, 4, 5$ شماره‌گذاری کنیم، آنگاه دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۵ را می‌توان به عنوان جواب مساله در نظر گرفت:

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
شنبه	$1y_1$	$2y_4$	$4y_5$	$3y_2$	$5y_3$
یکشنبه	$3y_3$	$4y_1$	$1y_2$	$5y_4$	$2y_5$
دوشنبه	$2y_2$	$3y_5$	$5y_1$	$4y_3$	$1y_4$
سه‌شنبه	$5y_1$	$1y_3$	$3y_4$	$2y_1$	$4y_2$
چهارشنبه	$4y_4$	$5y_2$	$2y_3$	$1y_5$	$3y_1$

کاربرد دیگری از مربع‌های لاتین در صفحه‌های تصویری متناهی است.

تعریف ۱۰ : صفحه تصویری عبارت است از مجموعه‌ای به نام نقاط و مجموعه دیگری به نام خطوط و یک رابطه برخورد یا وقوع که گوییم «نقطه روی خط واقع است» به طوری که چهار خاصیت زیر برقرار باشند:

۱. از هر دو نقطه یک و فقط یک خط عبور می‌کند.

۲. هر دو خط فقط و فقط در یک نقطه برخورد دارند.

۳. چهار نقطه وجود دارند که هیچ سه نقطه از آن چهار نقطه، بر یک خط واقع نیستند.

۴. چهار خط وجود دارند که هیچ سه خط از آن چهار خط از یک نقطه نمی‌گذرند.

تعریف ۱۱ : اگر مجموعه نقاط (و در نتیجه مجموعه خطوط) یک صفحه تصویری، متناهی باشد، آن را **صفحه تصویری متناهی** گویند. اگر در صفحه تصویری متناهی، تعداد نقاط واقع بر هر خط $n+1$ باشد، n را **مرتبه** صفحه تصویری متناهی گویند.

مثال ۲۴.۷ مثال۱۴.۷ یک صفحه تصویری متناهی با ۷ نقطه از مرتبه ۲ است.

قضیه ۱۸.۷ *در یک صفحه تصویری متناهی از مرتبه n، تعداد نقاط (تعداد خطوط) برابر n^2+n+1 است.*

برهان: نقطه دلخواه O را در نظر بگیرید. از این نقطه $n+1$ خط عبور می‌کند و روی هر خط، به غیر از نقطه O؛ n نقطه دیگر وجود دارد. در این صورت تعداد نقاط؛ به غیر از O، $n(n+1)$ است. اگر نقطه O را نیز اضافه کنیم، n^2+n+1 نقطه وجود دارد.

قضیه بعدی مشخص می‌کند که برای کدام عدد صحیح و مثبت، یک صفحه تصویری متناهی از مرتبه n وجود دارد.

قضیه ۱۹.۷ (*بدون اثبات*) *وجود صفحه تصویر متناهی از مرتبه n با کامل بودن عدد n معادل است.*

مربع وفقی

با استفاده از مربع‌های وفقی، می‌توان مربع‌های لاتین را به وجود آورد و از روی مربع لاتین نیز صفحه تصویری متناهی را ایجاد کرد.

تعریف ۱۲ : یک مربع $n \times n$ از اعدادی مانند $۱, ۲, \ldots, n^{۲}$ را که مجموع اعداد نوشته در هر سطر، هر ستون، قطر اصلی و قطر فرعی با هم برابر هستند، **مربع وفقی** می‌گویند.

یک روش ساده برای ساختن مربع وفقی از مرتبه $n = ۴k$ به صورت زیر است:

الگوریتم ۳.۷ گام اول مربع $۴k \times ۴k$ را به مربع‌های کوچک‌تر با ابعاد ۴×۴ تقسیم کنید.

گام دوم در هر مربع کوچک، قطرها را رسم کنید (علامت بزنید).

گام سوم اعداد ۱ تا $(۴k)^{۲}$ را به صورت زیر در دو مرحله، در خانه‌های مربع قرار دهید.

مرحله اول از راست به چپ و از بالا به پایین، اعداد را در خانه ها قرار دهید ولی اعدادی که باید در خانه‌های علامت خورده قرار دهید، را ننویسید.

مرحله دوم از چپ به راست و از پایین به بالا، اعداد را در خانه‌های علامت خورده قراردهید.

با استقرای ریاضی ثابت می‌شود که مربع حاصل از این الگوریتم، یک مربع وفقی است.

مثال ۲۵.۷ با استفاده از الگوریتم ۳.۷ ، مربع وفقی ۸×۸ چنین است.

۵۷	۷	۶	۶۰	۶۱	۳	۲	۶۴
۱۶	۵۰	۵۱	۱۳	۱۲	۵۴	۵۵	۹
۲۴	۴۲	۴۳	۲۱	۲۰	۴۶	۴۷	۱۷
۳۳	۳۱	۳۰	۳۶	۳۷	۲۷	۲۶	۴۰
۲۵	۳۹	۳۸	۲۸	۲۹	۳۵	۳۴	۳۲
۴۸	۱۸	۱۹	۴۵	۴۴	۲۲	۲۳	۴۱
۵۶	۱۰	۱۱	۵۳	۵۲	۱۴	۱۵	۴۹
۱	۶۳	۶۲	۴	۵	۵۹	۵۸	۸

برای ساختن مربع وفقی، وقتی n فرد است، از الگوریتم بعدی استفاده می‌کنیم. این الگوریتم را برای اعداد $۰, ۱, ۲, \ldots, ۲۴$ اجرا می‌کنیم.

الگوریتم ۴.۷ گام اول در جدولی مانند شکل زیر، اعداد را به صورت قطری از چپ به راست و از پایین به بالا می‌نویسیم.

				۴				
			۳		۹			
		۲		۸		۱۴		
	۱		۷		۱۳		۱۹	
۰		۶		۱۲		۱۸		۲۴
	۵		۱۱		۱۷		۲۳	
		۱۰		۱۶		۲۲		
			۱۵		۲۱			
				۲۰				

گام دوم هر عددی که در داخل مربع اصلی قرار نداشته باشد، به اندازه n واحد روی سطر یا ستون حرکت داده و به داخل مربع منتقل کنید. آنچه به دست می‌آید یک مربع وفقی $n \times n$ است.

۲	۱۵	۸	۲۱	۱۴
۱۹	۷	۲۰	۱۳	۱
۶	۲۴	۱۲	۰	۱۸
۲۳	۱۱	۴	۱۷	۵
۱۰	۳	۱۶	۹	۲۲

مثال ۲۶.۷ مربع وفقی ۳×۳ به صورت زیر است.

۱	۶	۵
۸	۴	۰
۳	۲	۷

اینک با استفاده از مربع وفقی، صفحه تصویری متناهی از مرتبه ۳ را تولید می‌کنیم. برای این کار، اعداد مربع وفقی فوق را در مبنای سه می‌نویسیم (در حالت کلی در مبنای n). سپس با تفکیک رقم‌های آن، دو مربع لاتین به دست می‌آوریم. آیا این دو مربع لاتین به دست آمده به این روش، متعامد هستند؟ (چرا؟):

۱۲	۲۰	۰۱
۰۰	۱۱	۲۲
۲۱	۰۲	۱۰

۱	۲	۰
۰	۱	۲
۲	۰	۱

۲	۰	۱
۰	۱	۲
۱	۲	۰

سپس با استفاده از قضیه ۱۴.۷ ، آرایه متناظر را می‌نویسیم.

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۲ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}.$$

اینک با استفاده از این آرایه، صفحه تصویری متناهی از مرتبه سه به صورت زیر ساخته می‌شود:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P_۱ & P_۲ & P_۳ & P_۴ \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۲ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ Q_۱ \\ Q_۲ \\ Q_۳ \\ Q_۴ \\ Q_۵ \\ Q_۶ \\ Q_۷ \\ Q_۸ \\ Q_۹ \end{array}$$

نقاط این صفحه تصویری متناهی عبارتند از:

$$\{P_۱, \ldots, P_۴, Q_۱, \ldots, Q_۹\},$$

و خطوط این صفحه را به صورت زیر به وجود می‌آوریم. ابتدا خط ایده‌ال L را در نظر بگیرید:

$$L = \{P_۱, P_۲, P_۳, P_۴\},$$

و سپس خط L_{ij} را که شامل نقاط P_i و Q_j هایی است که j به جای مولفه a_{ij} در این آرایه قرار گرفته است. به عنوان مثال:

$$L_{۱۱} = \{P_۱, Q_۴, Q_۵, Q_۶\}$$

زیرا در ستون اول، عدد ۱ در مقابل نقاط $Q_۴$، $Q_۵$ و $Q_۶$ قرار دارد. با توجه به روال فوق، سایر خطوط

این صفحه تصویری چنین است:

$$\begin{aligned}
L_{۱۰} &= \{P_۱, Q_۱, Q_۲, Q_۳\}\\
L_{۱۲} &= \{P_۱, Q_۷, Q_۸, Q_۹\}\\
L_{۲۰} &= \{P_۲, Q_۱, Q_۴, Q_۸\}\\
L_{۲۱} &= \{P_۲, Q_۲, Q_۶, Q_۷\}\\
L_{۲۲} &= \{P_۲, Q_۳, Q_۵, Q_۹\}\\
L_{۳۰} &= \{P_۳, Q_۱, Q_۶, Q_۹\}\\
L_{۳۱} &= \{P_۳, Q_۲, Q_۵, Q_۸\}\\
L_{۳۲} &= \{P_۳, Q_۳, Q_۴, Q_۷\}\\
L_{۴۰} &= \{P_۴, Q_۱, Q_۵, Q_۷\}\\
L_{۴۱} &= \{P_۴, Q_۲, Q_۴, Q_۹\}\\
L_{۴۲} &= \{P_۴, Q_۳, Q_۶, Q_۸\}
\end{aligned}$$

و حاصل، یک صفحه تصویری متناهی از مرتبه ۳ است.

تمرین ۴.۷

۱. یک مربع لاتین $A = (a_{ij})$ را **خودتوان** گویند هرگاه برای هر i، $a_{ij} = i$.

(آ) نشان دهید اگر n فرد باشد، آنگاه $A_n = (a_{ij})$ خودتوان است که در آن

$$a_{ij} = ۲i - j \quad (n \text{ پیمانه}).$$

(ب) فرض کنید n یک عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ و $A_{n-۱}$ یک مربع لاتین خودتوان از مرتبه $n - ۱$ است. فرض کنید مولفه‌های $(۱, ۲), (۲, ۳), \ldots, (n - ۱, n)$ از $A_{n-۱}$ را با n عوض کنیم و سطر

$$(n - ۲, n - ۱, ۱, \ldots, n - ۳, n)$$

و ستون

$$(n - ۱, ۱, ۲, \ldots, n - ۲, n)$$

را به $A_{n-۱}$ اضافه کنیم. نشان دهید مربع حاصل یک مربع لاتین خودتوان از مرتبه n است.

۲. شش مربع لاتین متعامد از مرتبه ۷ بسازید.

۳. فرض کنید A و B دو مربع لاتین متعامد هستند طوری که در گوشه چپ بالای هر کدام یک زیرمربع لاتین از مرتبه ۵ × ۵ به نام‌های S و T قرار دارند. ثابت کنید S و T نیز متعامد هستند.

۴. مربع‌های وفقی ۴ × ۴، ۱۲ × ۱۲ و ۱۶ × ۱۶ را بسازید.

۵. مربع‌های وفقی ۷ × ۷، ۹ × ۹ و ۱۱ × ۱۱ را بسازید.

۶. با استفاده از روش این بخش، یک صفحه تصویری متناهی از مرتبه ۵ بسازید.

۷. نشان دهید در یک مربع وفقی ۳×۳ که از اعداد ۱ تا ۹ پر شده‌اند، عددی که در مرکز مربع قرار می‌گیرد، همیشه ۵ است.

۸. نشان دهید در یک صفحه تصویری متناهی از مرتبه n، از هر نقطه $n + ۱$ خط عبور می‌کند.

فصل ۸

کدگذاری و رمزنگاری

تبادل اطلاعات موضوعی است که اغلب با خطا همراه است. برای کاهش خطا، لازم است پیام‌ها کدگذاری شوند. **کدگذاری** و کدبرداری باید در کوتاه‌ترین زمان ممکن انجام گرفته و علاوه بر آن، اگر پیام دریافت شده با خطا همراه باشد، امکان کشف خطا را فراهم آورده و تا حد امکان بتواند این خطا را اصلاح کند. درست در نقطه مقابل آن، ممکن است بخواهیم اطلاعاتی را به امن‌ترین صورت مبادله کنیم، طوری که اگر شخص ثالثی به صورت اتفاقی و یا عمدی به این اطلاعات دسترسی پیدا کرد، برای کشف رمز و درک پیام اصلی زمان زیادی لازم باشد و این کار عملا در زمان معقول امکان‌پذیر نشود. چنین کاری را **رمزنگاری** گویند. در این فصل با این دو مفهوم به طور مختصر آشنا می‌شوید. برای درک مطالب پیشرفته‌تر، خواننده را به کتاب‌های تخصصی مانند [۳۴] و [۱۹] ارجاع می‌دهیم.

۱.۸ کدگذاری

با توجه به این‌که پیام مبادله شده بین فرستنده و گیرنده را می‌توان به اطلاعات دودویی تبدیل کرد، فرض می‌کنیم پیام، دنباله‌ای متناهی از ۰ها و ۱ها است. ابتدا چند تعریف مقدماتی را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱ : یک بلوک دودویی (m,n) ــ کد، از یک تابع کدگذاری $E:\mathcal{B}^m\to\mathcal{B}^n$ و یک تابع کدبرداری $D:\mathcal{B}^n\to\mathcal{B}^m$ تشکیل شده است که در آن $\mathcal{B}=\{۰,۱\}$ یک میدان متناهی است و m و n اعداد صحیح مثبت هستند. هر عضو از حوزه مقادیر تابع E؛ یک **کدواژه** نامیده می‌شود. برای سادگی می‌توان فرض کرد که صفر به مفهوم نقطه و ۱ به مفهوم خط در الفبای مورس است.

تعریف ۲ : (تابع فاصله) برای $a,b\in\mathcal{B}^n$، فاصله بین a و b را با $d(a,b)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d(a,b)=\sum_{i=1}^{n}x_i$$

که در آن

$$x_i=\begin{cases} ۰ & a_i=b_i \\ ۱ & a_i\neq b_i \end{cases}\qquad ۱\leq i\leq n,$$

و $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ و $b=(b_1,b_2,\dots,b_n)$.

مثال ۱.۸ اگر $a = 10011011$ و $b = 11011010$؛ آنگاه $d(a,b) = 2$.

تعریف ۳ : (تابع وزن) اگر $a \in \mathcal{B}^n$ ، $w(a)$ را وزن کدواژه تعریف می‌کنیم که تعداد مولفه‌های غیرصفر a را نشان می‌دهد.

مثال ۲.۸ اگر $a = 11011011$ آنگاه $w(a) = 6$ و اگر $b = 11010010$ آنگاه $w(b) = 4$.

لم ۲ *اگر* $a, b \in \mathcal{B}^n$، *آنگاه،* $d(a,b) = w(a+b)$.

برهان: فرض کنید $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ و $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. برای هر $1 \leq i \leq n$، $a_i + b_i = 1$ اگر و فقط اگر $a_i \neq b_i$. پس، زوج (a_i, b_i) عدد ۱ را به $w(a+b)$ اضافه می‌کند اگر و فقط اگر مقدار ۱ را به $d(a,b)$ اضافه کند. بنابراین $d(a,b) = w(a+b)$.

نتیجه ۱۸ *برای* $a, b, c \in \mathcal{B}^n$، $d(a,b) = d(a+c, b+c)$.

لم ۳ *برای* $a, b, c \in \mathcal{B}^n$، $d(a,b) \leq d(a,c) + d(b,c)$.

برهان: فرض کنید $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$، $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ و $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$. برای هر $1 \leq i \leq n$، فاصله بین a_i و b_i را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d(a_i, b_i) = \begin{cases} 0 & a_i = b_i \\ 1 & a_i \neq b_i \end{cases}$$

به همین ترتیب، $d(a_i, c_i)$ و $d(b_i, c_i)$ را نیز تعریف می‌کنیم. در این صورت

$$d(a,b) = \sum_{i=1}^{n} d(a_i, b_i).$$

اگر $a_i = b_i$، آنگاه

$$d(a_i, b_i) \leq d(a_i, c_i) + d(b_i, c_i).$$

فرض کنید $a_i \neq b_i$. در این صورت، $d(a_i, b_i) = 1$. اگر $a_i = c_i$ آنگاه لزوماً $b_i \neq c_i$ و اگر $b_i = c_i$ ؛ آنگاه $a_i \neq c_i$. در هر دو حالت

$$d(a_i, b_i) = d(a_i, c_i) + d(b_i, c_i).$$

بنابراین

$$\begin{aligned} d(a,b) &= \sum_{i=1}^{n} d(a_i, b_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} d(a_i, c_i) + \sum_{i=1}^{n} d(b_i, c_i) \\ &= d(a,c) + d(b,c). \end{aligned}$$

تعریف ۴ : (اصل کدبرداری نزدیک‌ترین همسایه) اگر کلمه $r \in \mathcal{B}^n$ دریافت شود و r یک کدواژه باشد، قرار می‌دهیم $D(r) = r$. اگر r یک کدواژه باشد، فاصله r را از کدواژه دیگر به دست می‌آوریم. کمترین فاصله را ℓ می‌نامیم. اگر a تنها کدواژه‌ای باشد که $d(a, r) = \ell$، قرار می‌دهیم $D(r) = a$. اگر بیش از یک کدواژه موجود باشد که فاصله آن از r، مساوی ℓ است، گوییم نقصی در کدبرداری رخ داده‌است. این اصل را اصل **کدبرداری نزدیک‌ترین همسایه** می‌گویند.

تعریف ۵ : (خطاهای کشف شده و کشف نشده) گوییم بردار خطای e با یک کد کشف می‌شود هرگاه، برای هر کدواژه a، $a + e$ یک کدواژه نباشد. اگر برای برخی از کدواژه‌های a، $a + e$ یک کدواژه باشد، آنگاه گوییم خطای e کشف نشده باقی مانده است.

هرگاه یک کلمه با طول n ارسال شود و k مولفه آن به صورت نادرست به گیرنده برسد، گوییم در مبادله پیام، k خطا رخ داده است. با قراردادن ۱ به جای هر یک از k خطا و قرار دادن صفر به جای هر مولفه بدون خطا، یک کدواژه e با وزن k می‌سازیم. به این ترتیب، k موقعیت غیرصفر در یک بردار خطا با وزن k، مجموعه‌ای از k خطا را مشخص می‌کند. در این صورت، یک تناظر یک به یک بین تمامی کدواژه‌های خطا با وزن k و مجموعه‌ای از k خطا وجود دارد. مجموعه‌ای از k خطا را **کشف شده** می‌نامیم، اگر کلمه خطای متناظر با وزن k کشف شود.

قضیه ۱.۸ *شرط لازم و کافی برای آن که یک کد حداکثر k خطا را کشف کند، آن است که حداقل فاصله بین دو کدواژه دلخواه، $k + ۱$ یا بیشتر باشد.*

برهان: فرض کنید C مجموعه تمامی کدواژه‌های با طول n در یک کد بوده و برای هر $b, b' \in C$، $d(b, b') \geq k + ۱$ است. فرض کنید کدواژه $b \in C$ مخابره شود. واژه خطای e برای این پیام به صورت $e = (e_۱, \dots, e_n)$ تعریف می‌شود، طوری که

$$w(e) = \sum_{i=۱}^{n} e_i \leq k.$$

آنگاه واژه دریافت شده $b + e$ است و داریم:

$$d(b + c, b) = w(b + c + b) = w(۲b + e) = w(e) \leq k.$$

این نشان می‌دهد که $b + e$ یک کدواژه نیست. به همین ترنیب می‌دانیم که برخی از خطاها در حین انتقال پیام رخ داده است و این امر ثابت می‌کند که بردار خطای a کشف شده است.
برعکس، فرض کنید که کد، توانایی کشف تمامی مجموعه خطاهایی از k خطا یا کمتر را دارد. این فرض به این معنی است که اگر e یک بردار خطا با $w(e) \leq k$ و b کدواژه مشخصی باشد، آنگاه $b + e$ یک کدواژه نیست. فرض کنید b و b' از اعضای C هستند به طوری که $d(b, b') \leq k$. قرار دهید $e = b + b'$. در این صورت $w(e) \leq k$ و همچنین

$$b + e = b + b + b' = b',$$

که خود یک کدواژه است. بنابراین خطای e کشف نشده باقی می‌ماند. از این تناقض نتیجه می‌شود که برای هر $b, b' \in C$، $d(b, b') \geq k + ۱$.

تعریف ۶ : (خطاهای اصلاح شده) گوییم خطای e با یک کد اصلاح می‌شود هرگاه تابع کدبرداری D چنان باشد که برای هر کدواژه b، $D(b + e) = b$. همچنین می‌گوییم k خطا اصلاح می‌شود هرگاه واژه خطای متناظر با وزن k اصلاح شود.

قضیه ۲.۸ *برای کد (E,D)، شرط لازم برای آن که مجموعه‌ای از k خطا یا کمتر اصلاح شود این است که حداقل فاصله بین دو کدواژه $2k+1$ باشد.*

برهان: فرض کنید $a=(a_1,\ldots,a_n)$ و $b=(b_1,\ldots,b_n)$ دو کدواژه با $d(a,b)\leq 2k$ هستند. در این صورت $w(a,b)=\ell\leq 2k$. می‌توان واژه‌های خطای e و e' را چنان یافت که $w(e)\leq k$ و $w(e')\leq k$ و $a+b=e+e'$. در این صورت $a+e=b+e'$.

حالت اول اگر ℓ یک عدد فرد باشد، یعنی $\ell=2t+1$، آنگاه می‌توان فرض کرد که $w(e)=t$ و $w(e')=t+1$. بنابراین

$$d(a+e,a)=w(a+e+a)=w(e)<w(e')=d(b+e',b).$$

فرض کنید کدواژه b منتقل شود و در این مسیر انتقال، خطای e' بر آن اضافه شود؛ در این صورت

$$d(b+e',a)=d(a+e,a)<d(b+e',b).$$

با توجه به اصل کدبرداری نزدیک‌ترین همسایه، $b+e'$ به صورت a یا کدواژه دیگری غیر از b کدبرداری شود. بنابراین، خطای e' با $w(e')\leq k$ کشف نمی‌شود. پس باید حداقل فاصله دو کدواژه $2k+1$ باشد.

حالت دوم اگر $\ell=2t$ باشد، می‌توان فرض کرد که $w(e)=w(e')=t$. حال

$$d(a+e,a)=w(e)=t=w(e')=d(b+e',b).$$

پس کدواژه دریافت شده $a+e$ فاصله یکسانی با هر دو کدواژه a و b دارد و کدواژه دریافت شده $b+e$ یا به صورت کدواژه‌ای متمایز از b کدبرداری می‌شود و یا در این کد، برای کدواژه منتقل شده نمی‌توان تصمیمی اتخاذ کرد که دوباره یک تناقض است.

پس حکم قضیه برقرار است.

تعریف ۷ : یک ماتریس $m\times n$ با $m<n$ روی $\mathcal{B}$ را در نظر بگیرید. این ماتریس را **ماتریس کدگذاری** یا ماتریس مولد می‌نامند هرگاه ، m ستون اول آن، ماتریس همانی I_m را به وجود آورد . برای ماتریس مولد G داده شده، تابع کدگذاری $E:\mathcal{B}^n\to\mathcal{B}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall x\in\mathcal{B}^n,\quad E(x)=xG.$$

چون m ستون اول G ماتریس همانی است، پس قسمت اول xG همان x است. بنابراین، روش کدگذاری ماتریس برای کدهای متمایز، کدواژه‌های متمایزی را نسبت می‌دهد. پس نگاشت E یک به یک است. همچنین $\mathcal{B}^m$ و $\mathcal{B}^n$ گروه‌های جابجایی جمعی هستند و برای هر $x,y\in\mathcal{B}^m$ داریم:

$$E(x+y)=(x+y)G=xG+yG=E(x)+E(y).$$

پس E یک همریختی است. چنین کدهایی را **کد ماتریسی** می‌نامند. هرگاه یک کدواژه یک **کد بلوکی** از یک گروه جمعی باشد، آنگاه آن را **کد گروه** می‌نامند.

مثال ۳.۸ فرض کنید:

$$G=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

در این صورت، اگر پیام اصلی به صورت $x=(1,0,1)$ باشد، آنگاه کدواژه متناظر عبارت است از $xG=(1,0,1,1,0,1)$.

تعریف ۸ : کد **کنترل زوجیت**، کدی است که با تابع کدگذاری زیر تعریف می‌شود:

$$E : \mathcal{B}^m \to \mathcal{B}^{m+1}$$
$$E(a_1, a_2, \ldots, a_m) = (a_1, a_2, \ldots, a_m, a_{m+1}),$$

که در آن

$$a_{m+1} = \begin{cases} 1 & \text{هرگاه } w(a) \text{ فرد باشد} \\ 0 & \text{هرگاه } w(a) \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

لم ۴ [۳۴] *کد کنترل زوجیت* $(m, m+1)$ *یک کدگروه است.*

در ادامه چند خاصیت را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

خاصیت ۱ : برای یک کدگروه، حداقل فاصله، مساوی حداقل وزن یک کدواژه غیرصفر است.

مثال ۴.۸ ماتریس مولد 3×6 را در نظربگیرید.

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

تمامی کدواژه‌های تولید شده توسط این ماتریس عبارتند از:

$$\begin{array}{ccc}
000 & \longrightarrow & 000000 \\
001 & \longrightarrow & 001111 \\
010 & \longrightarrow & 010011 \\
100 & \longrightarrow & 100110 \\
101 & \longrightarrow & 101001 \\
110 & \longrightarrow & 110110 \\
011 & \longrightarrow & 011100 \\
111 & \longrightarrow & 111010
\end{array}$$

در این کدگروه، چهار کدواژه با وزن ۴ و سه کدواژه با وزن ۳ و یک کدواژه با وزن صفر وجود دارد. پس حداقل فاصله برابر با ۳ است. بنابراین، این کد توانایی اصلاح یک خطا و کشف دو خطا را دارد.

در ادامه بخش، فرایند کدبرداری برای کدهای گروه را بیان می‌کنیم. در این روش از تفکیک و افراز یک گروه متناهی به**هم‌مجموعه** استفاده می‌کنیم. می‌دانیم هرگاه C یک زیرگروه از $\mathcal{B}^n$ باشد، برای هر $a \in \mathcal{B}^n$، مجموعه

$$a + C = \{a + c : c \in C\},$$

زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{B}^n$ است که هم‌مجموعه C در $\mathcal{B}^n$ نامیده می‌شود. اگر $b \in a + C$، آنگاه عضوی مانند $c \in C$ موجود است طوری که $b = a + c$. بنابراین، برای هر $c' \in C$ داریم:

$$b + c' + a + (c + c') \in a + C.$$

پس $b + C \subseteq a + C$. همچنین $b = a + c$ موجب می‌شود $a = b + c$ و چنانچه ملاحظه شد، داریم: $a + C \subseteq b + C$. پس

$$a + C = b + C.$$

از طرف دیگر؛ اگر $a + C = b + C$، آنگاه

$$b = b + \circ \in b + C = a + C.$$

پس داریم:

« $b \in \mathcal{B}^n$ در $a + C$ است اگر و فقط اگر $a + C = b + C$.»

حال هم‌مجموعه‌های $a + C$ و $b + C$ در $\mathcal{B}^n$ را در نظر بگیرید. اگر

$$(a + C) \cap (b + C) \neq \varnothing,$$

آنگاه عضوی مانند x موجود است طوری که

$$x \in a + C, \quad x \in b + C,$$

و بنابراین:

$$a + C = x + C, \quad b + C = x + C.$$

پس $a + C = b + C$. بنابراین نتیجه می‌شود:

« دو هم‌مجموعه در $\mathcal{B}^n$ یا یکسان هستند و یا متمایز.»

واضح است که تعداد اعضای هر هم‌مجموعه $a + C$ با مرتبه زیرگروه C یکسان است و هر عضو از $\mathcal{B}^n$ در یک هم‌مجموعه قرار دارد. به عبارت دیگر، اگر $a \in \mathcal{B}^n$ ، آنگاه $a \in (a + C)$. همچنین گروه $\mathcal{B}^n$ متناهی است. بنابراین، تعداد هم‌مجموعه‌های $\mathcal{B}^n$ نیز متناهی است. اگر $a^1 + C$، ...، $a^k + C$ هم‌مجموعه‌های متمایز C در $\mathcal{B}^n$ باشند، آنگاه داریم:

$$\mathcal{B}^n = \bigcup_{i=1}^{k} (a^i + C),$$

$$(a^i + C) \cap (a^j + C) = \varnothing, \quad i \neq j.$$

یک کدگروه (m, n) را در نظر بگیرید و فرض کنید C مجموعه تمامی کدواژه‌ها در این کد است. در این صورت، مرتبه C برابر 2^m بوده و $\mathcal{B}^n$ مجموعه تمامی واژه‌هایی به طول m که یک گروه بوده و C نیز زیرگروهی از $\mathcal{B}^n$ است. پس، می‌توان B را به صورت اتحادیه‌ای از هم‌مجموعه‌های متمایز C در $\mathcal{B}^n$ نوشت. در هر هم‌مجموعه C در $\mathcal{B}^n$، واژه‌ای مانند b^k با حداقل وزن اختیار می‌کنیم و آن را **پیشرو هم‌مجموعه** می‌نامیم. واضح است که

$$w(b^k) \leq w(b^k + c^{k'}), \quad \forall c^{k'} \in C.$$

هر عضو C از $\mathcal{B}^n$ را می‌توان به صورت منحصر به فرد $c = b^k + c^{k'}$ نوشت که در آن $c^{k'}$ عضوی از C است. تابع کدبرداری D را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D(c) = c^{k'}.$$

برای هر کدواژه c^r که $c^r = c^{k'}$، داریم:

$$\begin{aligned} d(c, c^r) &= d(b^k + c^{k'}, c^k) = w(b^k + c^{k'} + c^k) \\ &\geq w(b^r) \\ &= d(b^k + c^{k'}, c^k) = d(c, c^r). \end{aligned}$$

پس هیچ کدواژه‌ای در دایره‌ای به مرکز c و شعاع $d(c, c^{k'})$ وجود ندارد. این فرایند کدبرداری را **کدبرداری با پیشروهای هم‌مجموعه** می‌نامند.

قضیه ۳.۸ [۳۴] *در کدهای گروهی، کدبرداری با استفاده از پیشروهای هم‌مجموعه، دقیقاً تمامی خطاهایی که از نوع پیشرو هم‌مجموعه هستند را اصلاح می‌کند.*

مثال ۵.۸ کد کنترل زوجیت $(۳, ۴)$ را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{lll} ۰۰۰ \longrightarrow ۰۰۰۰ & \qquad & ۰۱۱ \longrightarrow ۰۱۱۰ \\ ۰۰۱ \longrightarrow ۰۰۱۱ & & ۱۰۱ \longrightarrow ۱۰۱۰ \\ ۰۱۰ \longrightarrow ۰۱۰۱ & & ۱۱۰ \longrightarrow ۱۱۰۰ \\ ۱۰۰ \longrightarrow ۱۰۰۱ & & ۱۱۱ \longrightarrow ۱۱۱۱ \end{array}$$

افراز هم‌مجموعه این کد در $\mathcal{B}^۴$ به صورت زیر است:

- پیشرو هم‌مجموعه ۰۰۰۰ و هم‌مجموعه متناظر عبارت است از:

$$۰۰۰۰, ۰۰۱۱, ۰۱۰۱, ۱۰۰۱, ۰۱۱۰, ۱۰۱۰, ۱۱۰۰, ۱۱۱۱.$$

- پیشرو هم‌مجموعه ۱۰۰۰ و هم‌مجموعه متناظر عبارت است از:

$$۰۰۰۱, ۰۰۱۰, ۰۱۰۰, ۱۰۰۰, ۰۱۱۱, ۱۰۱۱, ۱۱۰۱, ۱۱۱۰.$$

توجه داشته باشید که در هم‌مجموعه دوم، می‌توان هر یک از چهار کدواژه ۰۰۰۱، ۰۰۱۰، ۰۱۰۰، ۱۰۰۰ را به عنوان پیشرو هم‌مجموعه در نظر گرفت. اگر کدواژه ۰۰۰۱ به عنوان پیشرو هم‌مجموعه انتخاب شده و کدواژه ۱۰۱۱ دریافت شود، آنگاه کدبرداری با استفاده از پیشروهای هم‌مجموعه، این کدواژه را به صورت

$$۱۰۱۱ + ۰۰۰۱ = ۱۰۱۰$$

کدبرداری می کند.

دوباره مثال ۴.۸ را در نظر بگیرید. اگر $(a_۱, a_۲, \ldots, a_۶)$ کدواژه‌ای در این کد باشد که متناظر با پیام $(a_۱, a_۲, a_۳)$ است، آنگاه

$$(a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵, a_۶) = (a_۱, a_۲, a_۳)G.$$

پس

$$\begin{aligned} a_۴ &= a_۱ + a_۳ \\ a_۵ &= a_۱ + a_۲ + a_۳ \\ a_۶ &= a_۲ + a_۳ \end{aligned}$$

این معادلات را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_۱ & & +a_۳ & +a_۴ & & & = & ۰ \\ a_۱ & +a_۲ & +a_۳ & & +a_۵ & & = & ۰ \\ & a_۲ & +a_۳ & & & +a_۶ & = & ۰ \end{array}$$

این معادلات را **معادلات کنترل زوجیت** می‌نامند. در شکل ماتریسی می‌توان نوشت:

$$\left[\begin{array}{cccccc} ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} a_۱ \\ a_۲ \\ a_۳ \\ a_۴ \\ a_۵ \\ a_۶ \end{array}\right] = ۰.$$

ماتریس

$$H = \left[\begin{array}{cccccc} ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

را **ماتریس کنترل زوجیت** گویند.
فرض کنید

$$A = \left[\begin{array}{ccc} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{array}\right]$$

آنگاه $G = [I_۳ \quad A]$ که در آن $I_۳$ ماتریس همانی از مرتبه ۳ است. همچنین

$$A' = A^T = \left[\begin{array}{ccc} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{array}\right]$$

و $H = [A' \quad I_۳]$. خاصیت ماتریس H این است که برای هر کدواژه a، $Ha = ۰$ (توجه داشته باشید که a یک کدواژه است.)

مثال ۶.۸ همچنان که در تعریف ۸ ملاحظه شد، می‌توان نتیجه گرفت که در این کد:

$$a_۱ + a_۲ + \cdots + a_m + a_{m+۱} = ۰,$$

و کد ماتریس مولد به صورت زیر است:

$$G = \left[\begin{array}{ccccc} ۱ & ۰ & \ldots & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & \ldots & ۰ & ۱ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \ldots & ۱ & ۱ \end{array}\right].$$

ماتریس کنترل زوجیت در این کد، یک ماتریس $۱ \times (m+۱)$ است و داریم:

$$H = [۱ \quad ۱ \quad \ldots \quad ۱].$$

مثال ۷.۸ کد ماتریسی $(۳,۶)$ با ماتریس مولد زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}.$$

برای هر کدواژه $a = (a_۱, a_۲, \ldots, a_۶)$ در این کد داریم:

$$(a_۱ \quad a_۲ \quad a_۳ \quad a_۴ \quad a_۵ \quad a_۶) = (a_۱ \quad a_۲ \quad a_۳)G.$$

پس

$$\begin{aligned} a_۴ &= a_۱ + a_۳ \\ a_۵ &= a_۱ + a_۲ \\ a_۶ &= a_۱ + a_۲ + a_۳ \end{aligned}$$

و یا

$$\begin{array}{cccccccc} a_۱ & & +a_۳ & +a_۴ & & & = & ۰ \\ a_۱ & +a_۲ & & & +a_۵ & & = & ۰ \\ a_۱ & +a_۲ & +a_۳ & & & +a_۶ & = & ۰ \end{array}$$

در نماد ماتریسی، این دستگاه معادلات به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$H \begin{bmatrix} a_۱ \\ a_۲ \\ a_۳ \\ a_۴ \\ a_۵ \\ a_۶ \end{bmatrix} = ۰$$

که

$$H = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

دوباره، ملاحظه می‌شود که

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

و بنابراین

$$A' = A^T = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

و $G = [I_۳ \quad A]$ و $H = [A^T \quad I_۳]$.

تعریف ۹ : (ماتریس کنترل زوجیت) هرگاه $m < n$، هر ماتریس H، با ابعاد $(n-m) \times n$ که $n-m$ ستون آخر آن ماتریس واحد I_{n-m} را مشخص می‌سازد، ماتریس کنترل زوجیت می‌نامند.

فرض کنید H یک ماتریس کنترل زوجیت با ابعاد $(n-m)\times m$ و $a=(a_1,\dots,a_m)$ دنباله‌ای به طول m است. همچنین فرض کنید $b=(b_1,\dots,b_m)$ یک واژه به طول m است که برای $1\le i\le m$، $b_i=a_i$ و $Hb^T=0$. فرض کنید:

$$H=[A \quad I_{n-m}].$$

آنگاه برقراری $Hb^T=0$ موجب می‌شود تا

$$[A \quad I_{n-m}]\begin{bmatrix} a^T \\ \bar{b}^T \end{bmatrix}=0,$$

که در آن $\bar{b}=(b_{m+1},\dots,b_n)$. پس

$$Aa^T+I_{n-m}\bar{b}^T=0.$$

بنابراین $\bar{b}^T=Aa^T$ و لذا $\bar{b}$ به طور منحصر به فرد از روی a تعیین می‌شود. این رابطه ثابت می‌کند که برای هر $a\in\mathcal{B}^m$، واژه $b\in\mathcal{B}^n$ به طور منحصر به فرد با روابط

$$a_i=b_i,\quad 1\le i\le m,\quad Hb^T=0. \tag{1.8}$$

در این صورت؛ تابع کدگذاری $E:\mathcal{B}^m\longrightarrow\mathcal{B}^n$ با ضابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\forall a\in\mathcal{B}^m,\quad E(a)=b,$$

که b از رابطه (۱.۸) مشخص می‌شود.

تعریف ۱۰ : برای کدواژه $r\in\mathcal{B}^n$، سندرم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$s=\mathrm{syndrom}=Hr^T.$$

ملاحظه می‌شود که سندرم هر کدواژه صفر است. با استفاده از سندرم، می‌توان شیوه اصلاح خطا برای ماتریس کنترل زوجیت H، متناظر با ماتریس مولد G را بیان کرد. فرایند کدبرداری سندرم به صورت زیر تعریف می‌شود.

الگوریتم ۱.۸ فرض کنید $r=(r_1,r_2,\dots,r_m,r_{m+1},\dots,r_n)$ واژه‌ای است که دریافت شده است و $s=Hr^T$ سندرم آن باشد.

گام اول اگر $s=0$، آنگاه فرض می‌کنیم r کدواژه‌ای است که ارسال شده است و پیام اصلی به صورت $(r_1,r_2,\dots,r_m)$ است.

گام دوم اگر s با ستون iــام ماتریس H یکسان است، آنگاه فرض بر این است که خطا هنگام ارسال iــامین مولفه پیام اتفاق افتاده است و قرار می‌دهیم:

$$c=(r_1,r_2,\dots,r_{i-1},r_i+1,r_{i+1},\dots,r_n),$$

و فرض می‌کنیم c پیامی است که مخابره شده است. در این حالت، پیام اصلی از دنباله m مولفه اول c به وجود می‌آید.

گام سوم اگر s نه صفر باشد و نه با ستونی از ماتریس H مطابقت داشته باشد، آنگاه حداقل دو خطا هنگام انتقال پیام رخ داده است.

در ادامه بخش، دو قضیه را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه ۴.۸ [۳۴] *ماتریس کنترل زوجیت H با ابعاد $m \times (n-m)$ تنها یک خطا را اصلاح می‌کند، اگر و فقط اگر ستون‌های H متمایز و غیرصفر باشند.*

قضیه ۵.۸ [۳۴]

(۱) *فرض کنید $G = [I_m \quad A]$ یک ماتریس مولد $m \times n$ برای یک کد ماتریس است. در این صورت، $H = [A^T \quad I_{n-m}]$ ماتریس کنترل زوجیت منحصر به فرد برای همان کد است.*

(۲) *اگر $H = [B \quad I_{n-m}]$ یک ماتریس کنترل زوجیت به ابعاد $n \times (n-m)$ باشد، آنگاه ماتریس $G = [I_m \quad B^T]$ یک ماتریس مولد منحصر به فرد برای همان کد است.*

در ادامه این بخش، کدهای دوگان را تعریف کرده و خواصی از آن را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱۱ : فرض کنید C یک (m,n)ــ کد با ماتریس مولد $G = [I - m \quad A]$ است. کد ماتریسی تعریف شده با ماتریس کنترل زوجیت $H = [A \quad I_m]$ کد **دوگان** C نامیده شده و با $C^{\perp}$ نشان می‌دهند.

مثال ۸.۸ اگر کد C با ماتریس

$$G = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

تعریف شود؛ آنگاه تنها کدواژه‌های زیر را داریم:

$$۰۰۰۰۰, \quad ,۱۰۱۱۰, \quad ,۰۱۱۰۱, \quad ,۱۱۰۱۱.$$

حداکثر فاصله در این کد، ۳ بوده و لذا این کد، خطاهای مضاعف را کشف کرده و می‌تواند تنها یک خطا را اصلاح کند. با نوشتن G به صورت $G = [I \quad A]$، داریم: $H = [A \quad I]$. کدواژه‌های کد تعریف شده با H، همان کدواژه‌های تعریف شده با تابع مولد

$$G_۱ = [I_۳ \quad A^T] = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

هستند. در این صورت؛ تمامی کدواژه‌ها عبارتند از:

$$\begin{array}{ll} ۰۰۰ \longrightarrow ۰۰۰۰۰ & ۰۱۱ \longrightarrow ۰۱۱۱۱ \\ ۰۰۱ \longrightarrow ۰۰۱۰۱ & ۱۰۱ \longrightarrow ۱۰۱۱۰ \\ ۰۱۰ \longrightarrow ۰۱۰۱۰ & ۱۱۰ \longrightarrow ۱۱۰۰۱ \\ ۱۰۰ \longrightarrow ۱۰۰۱۱ & ۱۱۱ \longrightarrow ۱۱۱۱۰ \end{array}$$

حداقل فاصله در این کد برابر یک است و تنها یک خطا را کشف می‌کند. این کد نمی‌تواند حتی یک خطا را اصلاح کند. به عنوان مثال، برای کدواژه دریافت شده ۱۱۱۰۱ داریم:

$$۱۱۱۰۰ + ۰۰۰۰۱ = ۱۱۰۰۱ + ۰۰۱۰۰.$$

ملاحظه می‌شود که دو کدواژه با فاصله مساوی وجود دارند و لذا در مورد کدواژه مخابره شده نمی‌توان تصمیمی اتخاذ کرد.

این مثال نشان می‌دهد که دوگان یک کد اصلاح خطا، لزوماً یک کد اصلاح خطا نیست.

قضیه ۶.۸ [۳۴] *یک (m,n)ـ کد با ماتریس مولد $G = [I_m \quad A]$ تمامی یک خطاها را به صورت صحیح کدبرداری می‌کند اگر و فقط اگر تمامی سطرهای A متمایز بوده و وزن هر کدام از آنها حداقل ۲ باشد.*

قضیه ۷.۸ *واژه‌های $x, y \in \mathcal{B}^n$ در یک هم‌مجموعه C قرار دارند اگر و فقط اگر سندرم آنها یکسان باشد.*

برهان: x و y در یک هم‌مجموعه قرار دارند اگر و فقط اگر $y = x + c$ که در آن c یک کدواژه از کد C است. ولی این حالت، فقط و فقط زمانی برقرار است که $x + y = c \in C$.
حال

$$\begin{aligned} x + y \in C \quad &\Longleftrightarrow \quad H(x+y)^T = \circ \\ &\Longleftrightarrow \quad H(x^T + y^T) = \circ \\ &\Longleftrightarrow \quad Hx^T + Hy^T = \circ \\ &\Longleftrightarrow \quad Hx^T = Hy^T = \circ. \end{aligned}$$

در پایان بخش، با بیان دو مثال، کدهای ساخته شده توسط ماتریس‌های هادامار و مربع‌های لاتین را معرفی می‌کنیم. علاقمندان به مطالب بیشتر در نظریه کدگذاری، می‌توانند به کتب تخصصی در این زمینه مراجعه کنند.

مثال ۹.۸ ماتریس هادامار H_n را در نظر بگیرید و آن را نرمال کنید. برای نرمال‌سازی این ماتریس، به جای یک، صفر و به جای ۱−، یک قرار دهید. در این ماتریس حاصل‌ضرب هر دو سطر متمایز ماتریس نرمال شده، صفر است. در زیر این ماتریس، مکمل آن را قرار دهید. منظور از مکمل یک ماتریس، ماتریسی است که به جای ۱ در ماتریس اصلی، مقدار ۱− در ماتریس مکمل قرار داده شده است و بر عکس. در این صورت یک ماتریس با ابعاد $۲n \times n$ داریم. برای ساختن کد، هر سطر را یک واژه در نظر می‌گیریم. با این کد، حداکثر $۲n - ۱$ خطا کشف شده و $n - ۱$ خطا قابل اصلاح است.

مثال ۱۰.۸ روش ارائه شده برای کدگذاری در این مثال به بلدروق[1] منسوب است و بر پایه مربع‌های لاتین متعامد طراحی شده است. با این روش می‌توان کدواژه‌هایی با طول $n^۲ + ۴n + ۱$ ساخت که $n^۲$ مولفه آن، مولفه‌های پیام اصلی هستند. می‌توان نشان داد که این کد، حداکثر ۲ خطا را اصلاح می‌کند. برای سادگی، فرض کنید $n = ۵$ و پیام اصلی که باید مخابره شود عبارت است از:

$$۱۱۱\circ\circ - \circ\circ۱۱\circ - ۱۱\circ۱۱ - \circ۱۱\circ۱ - \circ۱\circ۱\circ.$$

برای به دست آوردن ۲۱ مولفه کنترلی دیگر $(۱ + ۵ \times ۴)$ ، پیام اصلی را به بلوک‌های ۵ رقمی تفکیک می‌کنیم، طوری که هر بلوک ۵ رقم را شامل شود. هر بلوک را به عنوان یک سطر از ماتریس ۵×۵ در نظر می‌گیریم.

$$K = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & ۱ & ۱ & \circ \\ ۱ & ۱ & \circ & ۱ & ۱ \\ \circ & ۱ & ۱ & \circ & ۱ \\ \circ & ۱ & \circ & ۱ & \circ \end{bmatrix}$$

[1] Blderogge

به این ماتریس یک سطر و یک ستون به شرح زیر اضافه می‌کنیم. مجموع سطرها (ستون‌ها) را به عنوان یک ستون (سطر) جدید در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\text{K=}\begin{array}{|c|ccccc|}\hline & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

سپس ماتریس $M = ((a_{ij}, b_{ij}))$ را می‌سازیم که مولفه‌های آن از کنار هم قرار دادن دو مربع لاتین متعامد ۵×۵ به دست می‌آید. فرض کنید:

$$M = \begin{bmatrix} ۱۱ & ۲۲ & ۳۳ & ۴۴ & ۵۵ \\ ۳۴ & ۴۵ & ۵۱ & ۱۲ & ۲۳ \\ ۵۲ & ۱۳ & ۲۴ & ۳۵ & ۴۱ \\ ۲۵ & ۳۱ & ۴۲ & ۵۳ & ۱۴ \\ ۴۳ & ۵۴ & ۱۵ & ۲۱ & ۳۲ \end{bmatrix}$$

با استفاده از ماتریس M، از روی ماتریس K، ماتریس $L = (c_{ij})$ را می‌سازیم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$c_{ij} = K_{a_{ij}, b_{ij}}, \quad ۱ \leq i, j \leq ۵$$

به عنوان مثال $c_{۲۳} = K_{۵۱} = ۰$. ماتریس L را به صورت زیر داریم:

$$L = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

برای به دست آوردن کدواژه‌ای که باید مخابره شود، ۵ رقم به اولین سطر و ۵ رقم به ستون آخر K اضافه می‌کنیم. به همین ترتیب، ۵ رقم به اولین سطر و ۵ رقم به آخرین ستون L اضافه می‌کنیم و نهایتاً، مجموعه‌ای از $۵^۲ + ۴ \times ۵$ مولفه موجود است و واژه نهایی به طول $۵^۲ + ۴ \times ۵ + ۱$ خواهد بود. به عنوان مثال، برای پیام زیر که باید مخابره شود:

$$۱۱۱۰۰ - ۰۰۱۱۰ - ۱۱۰۱۱ - ۰۱۱۰۱ - ۰۱۰۱۰.$$

ستون ۱۰۰۱۰۰ و سطر ۰۰۱۱۰ به K و ستون ۱۰۰۱۰ و سطر ۰۰۰۰۰ به L اضافه می‌شوند و صفر نیز به عنوان مولفه کنترلی نهایی در نظر گرفته می‌شود. این نوع کد، تمامی خطاهای زوج را کشف می‌کند. همچنین حداکثر دو خطای اتفاق افتاده با این کد قابل اصلاح است.

۱.۸ تمرین

۱. ثابت کنید کد کنترل زوجیت $(m, n+۱)$، یک کد ماتریسی است. ماتریس مولد این کد چیست؟

۲. مثالی از یک کدگروه بیاورید که کد ماتریسی نیست.

۳. ماتریس کنترل زوجیت برای ماتریس‌های مولد کدهای ماتریسی زیر را بیابید.

(آ) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(ب) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(ج) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(د) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(ه) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

۴. هر یک از کدهای تعریف شده در تمرین قبلی چند خطا را کشف و چند خطا را اصلاح می‌کنند؟

۵. کد $E : \mathcal{B}^2 \to \mathcal{B}^6$ را با استفاده از ماتریس‌های کنترل زوجیت زیر بنویسید.

(آ) $$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ب) $$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ج) $$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تمامی کدواژه‌ها را در این سه کد مشخص کنید. آیا تمامی این کدها، یک خطا را اصلاح می‌کنند؟

۶. ماتریس‌های مولد و کنترل زوجیت برای کدهای دوگان تمرین‌های ۳ و ۵ را بیابید.

۷. کد $E : \mathcal{B}^2 \longrightarrow \mathcal{B}^6$ با حداقل فاصله چهار را بیابید.

۲.۸ رمزنگاری

رمزنگاری روندی است که با تغییر شکل دادن اطلاعات و ناخوانا کردن آن برای عموم، از افشای آن جلوگیری می‌کند. تمامی این اطلاعات طبقه‌بندی شده هستند و با اجرای این روند، تنها افرادی می‌توانند به این اطلاعات دسترسی داشته باشند که هم به روند رمزنگاری و هم به اطلاعات خاص روند رمزنگاری آگاهی دارد.

در این بخش، تعریف‌هایی را می‌آوریم و دو روش ساده برای رمزنگاری را بیان می‌کنیم. برای مطالعه بیشتر در مورد روش‌های رمزنگاری و تحلیل آن‌ها به [۱۹] مراجعه شود .

اطلاعات خاصی که در قالب یک متن تنظیم شده است، **متن خوانا** نامیده می‌شود. دسترسی افراد غیرمجاز موجب فاش شدن اطلاعات و وارد شدن ضربه جبران‌ناپذیر به سیستم می‌شود. این اطلاعات می‌توانند علمی، اقتصادی، سیاسی، نظامی و ... باشند. متنی که پس از اجرای روند رمزنگاری روی متن خوانا تولید می‌شود را **متن رمزی** می‌نامند. این متن به تنهایی برای عموم خوانا و مفهوم نیست، مگر آن که هم روند رمزنگاری و هم اطلاعات خاص آن روند در دسترس باشد. روندی که رمزنگاری برای ایجاد متن رمزی از روی متن خوانا استفاده می‌کند، **الگوریتم رمزنگاری** نامیده می‌شود. هر الگوریتم عموماً متکی به یک (یا چند) کلمه خاص است که آن را **کلید** می‌گویند. این کلید چنان طراحی می‌شود که با استفاده از آن، متن خوانا به طور منحصر به فرد، به متن رمزی تبدیل می‌شود و بدون دانستن آن، پیداکردن متن خوانا از روی متن رمزی تقریبا ناممکن است. این کلید برای دریافت کننده متن رمزی معلوم و برای سایر افراد نامعلوم است. **رمزگشایی** روندی است که با استفاده از کلید رمزنگاری و یا کلید دیگری که از روی کلید رمزگذاری تولید می‌شود؛ روی متن رمزی انجام شده و متن خوانای اولیه به دست می‌آید.

منظور از **الفبا**، مجموعه‌ای متناهی از نمادها است که متن خوانا و متن رمزی از این نمادها تشکیل شده‌اند. الفبای متعارف، مجموعه حروف بزرگ الفبای انگلیسی است. در حالت کلی، مجموعه الفبای استفاده شده در این کتاب را با

$$\mathbb{Z}_m = \{۰, ۱, ۲, \ldots, m - ۱\},$$

نشان می‌دهیم.

یکی از اصول کلی در طراحی الگوریتم‌های رمزنگاری، استفاده از یک تابع یک به یک روی مجموعه $\mathbb{Z}_m$ است، طوری که اجرای تابع برای یافتن مقدار تابع ساده است ولی در دست داشتن مقدار تابع، کمک چندانی در پیدا کردن معکوس تابع نمی‌کند.

در ادامه، روند رمزنگاری سزار را معرفی می‌کنیم.

جانشانی سزار

در این روند، فرض بر این است که حروف الفبای مورد استفاده متناظر با $\mathbb{Z}_m$ است. در این صورت، زیرمجموعه

$$C_m = \{c_k : ۱ \leq k \leq m\},$$

از گروه متقارن $\mathrm{sym}(\mathbb{Z}_m)$ را در نظر بگیرید که در آن

$$c_k : j \longrightarrow j + k \quad (\text{پیمانه } m).$$

این زیرمجموعه یک گروه است و آن را گروه **جانشانی سزار** می‌نامند.

خانواده رمزهای سزار به امپراطور روم باستان منسوب است. او در رمز کردن پیام‌های خود از $c_۳$ استفاده می‌کرد. در سیستم‌های جانشانی سزار، کلید استفاده شده عدد k است ولی برای سادگی کار $c_۳$ را به صورت جدولی نشان می‌دهند.

$$\begin{array}{lll}
A \longleftrightarrow d & B \longleftrightarrow e & C \longleftrightarrow f \\
D \longleftrightarrow g & E \longleftrightarrow h & F \longleftrightarrow i \\
G \longleftrightarrow j & H \longleftrightarrow k & I \longleftrightarrow l \\
J \longleftrightarrow m & K \longleftrightarrow n & L \longleftrightarrow o \\
M \longleftrightarrow p & N \longleftrightarrow q & O \longleftrightarrow r \\
P \longleftrightarrow s & Q \longleftrightarrow t & R \longleftrightarrow u \\
S \longleftrightarrow v & T \longleftrightarrow w & U \longleftrightarrow x \\
V \longleftrightarrow y & W \longleftrightarrow z & X \longleftrightarrow a \\
Y \longleftrightarrow b & Z \longleftrightarrow c &
\end{array}$$

برای رمزگشایی در این سیستم، کافی است تابع c_{m-k} را روی متن رمزی اِعمال کنیم تا متن خوانا مشخص شود.

مثال ۱۱.۸ متن خوانای SEND MORE MONEY را در نظر بگیرید. اگر از کلید $k = ۳$ برای رمزنگاری استفاده شود، متن رمزی VHQG PRUH PRGHB به دست می‌آید.

در پایان این بخش، الگوریتم رمزنگاری مستوی را که تعمیمی از روش رمزنگاری سزار است معرفی می کنیم.

جانشانی مستوی

فرض کنید a و b دو عدد صحیح دلخواه هستند و x_i حرفی از متن خوانا و y_i حرف رمزی متناظر است. در این صورت، تبدیل مستوی $T_{a,b}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{array}{ll}
T_{a,b} : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_m & \\
T_{a,b}(x_i) = ax_i + b = y_i & \qquad (\text{پیمانه } m)
\end{array}$$

واضح است که a و m باید نسبت به هم اول باشند تا چنین تبدیلی یک به یک شود.

مثال ۱۲.۸ متن خوانای SEND MORE MONEY با فرض $m = ۲۶$، $a = ۷$ $b = ۳$، به صورت ZFQY JXSF JXQFP به یک متن رمزی تبدیل می‌شود. برای رمزگشایی در این سیستم، اگر y_i حرفی از متن رمزی باشد، با حل معادله همنهشتی

$$ax_i = y_i - b \quad (\text{پیمانه} m),$$

متن خوانای x_i به دست می‌آید.

۲.۸ تمرین

۱. متن خوانایی را در الفبای فارسی انتخاب کرده و با استفاده از الگوریتم رمزنگاری سزار با کلید $k = ۷$ رمز کنید.

۲. متن خوانایی از الفبای فارسی در نظر گرفته و با استفاده از الگوریتم رمزنگاری مستوی با a و b مناسب رمز کنید.

۳. فرض کنید متناظر با حروف $A, B, \ldots, Z$، اعداد $۰, ۱, \ldots, ۲۵$ را داریم. در این صورت، کلمه ALGEBRA به صورت دنباله

$$۰, ۱۱, ۶, ۴, ۱, ۱۷, ۰ = a_۱, a_۲, \ldots, a_۷$$

تبدیل می‌شود. با فرض $a_۰ = ۴$ و تابع $f_i(a_i) = ۳a_i + a_{i-۱}$، متن رمزی متناظر را تولید کنید.

فصل ۹

پاسخ تمرینات منتخب

فصل اول

تمرین ۱ـ۱

۷ـ نتایج بازجویی از این سه نفر را به صورت زیر داریم:
افشین A : $\neg q \wedge r$
بابک B: $(\neg q) \Rightarrow (\neg r)$
پرویز P: $r \wedge (\neg p) \vee (\neg q)$

۱. جدول ارزش این سه بازجویی به صورت زیر است:

	p	q	r	A	B	P
۱	د	د	د	ن	د	ن
۲	د	د	ن	ن	د	ن
۳	د	ن	د	د	د	د
۴	د	ن	ن	ن	د	ن
۵	ن	د	د	ن	ن	د
۶	ن	د	ن	ن	د	ن
۷	ن	ن	د	د	ن	د
۸	ن	ن	ن	ن	د	ن

۲. (آ) با توجه به ردیف ۳ جدول ارزش، پاسخ مثبت است.
(ب) جدول نشان می‌دهد که بازجویی پرویز نتیجه منطقی بازجویی افشین است.
(ج) اگر هر سه بی‌گناه باشند در سطر اول جدول قرار داریم. با توجه به این که ارزش گزاره‌های A و P نادرست است، پس افشین و پرویز دروغ گفته‌اند.
(د) اگر هر سه بازجویی درست باشند در ردیف سوم قرار داریم. پس افشین و پرویز بی‌گناه هستند و بابک مقصر است.
(ه) در این حالت در ردیف ۶ قرار داریم. پس، بابک بی‌گناه بوده و افشین و پرویز مقصر هستند.

۸ـ فرض کنید «برف باریده است» را با s، «رانندگی مشکل است» را با p ، «دیر به محل کار رسیده‌ام» را با ℓ و «زودتر از منزل خارج می‌شوم» را با e نشان دهیم. در این صورت، بحث به صورت زیر است:

$$((s \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow (\ell \vee e)) \wedge s) \Rightarrow ((\neg \ell) \Rightarrow e).$$

این استنتاج معتبر است (چرا؟).

۱۲ـ پاسخ قسمتی از سوال به صورت زیر است:

- هیچ انسانی اتومبیل نیست. $\neg \exists x, (H(x) \wedge C(x))$
- هیچ اتومبیلی کامیون نیست. $\neg \exists x, (C(x) \wedge T(x))$
- انسانی وجود دارد. $\exists x, H(x)$
- اتومبیلی وجود دارد. $\exists x, C(x)$
- فقط انسان‌ها رانندگی می‌کنند. $\forall x((\exists y, D(x,y) \Rightarrow H(x))$
- تنها اتومبیل‌ها و کامیون‌ها رانده می‌شوند.
$\forall x((\exists y, D(y,x) \Rightarrow (C(x) \vee T(x))$
- برخی افراد رانندگی می‌کنند. $\exists x(H(x) \wedge \exists y, D(x,y))$
- برخی افراد اصلا رانندگی نمی‌کنند. $\exists x, (H(x) \wedge \neg \exists y, D(x,y))$
- با برخی اتومبیل‌ها رانندگی می‌شود. $\exists x(C(x) \wedge \exists y D(y,x))$
- با برخی اتومبیل‌ها رانندگی نمی‌شود. $\exists x(C(x) \wedge \neg \exists y D(y,x))$
- هر شخصی با اتومبیل یا کامیون رانندگی می‌کند.
$\forall x(H(x) \Rightarrow \exists y(D(x,y) \wedge (C(y) \vee T(y))))$
- برخی افراد هر دو اتومبیل و کامیون را رانندگی می‌کنند.
$\exists x(H(x) \wedge \exists y \exists z(D(x,y) \wedge C(y) \wedge D(x,z) \wedge T(z)))$
- برخی افراد اصلا رانندگی نمی‌کنند.
$\exists x(H(x) \wedge \neg \exists y(D(x,y) \wedge (C(y) \vee T(y))))$
- هیچ کس هر دو را رانندگی نمی‌کند.
$\neg \exists x(H(x) \wedge \exists y \exists z(D(x,y) \wedge D(x,z) \wedge C(y) \wedge T(z)))$
- هر اتومبیل حداکثر یک راننده دارد.
$\forall x(C(x) \Rightarrow \forall y \forall z((D(y,x) \wedge D(z,x)) \Rightarrow I(y,z)))$.
- هر کامیون دقیقا دو راننده دارد.
$\forall x(T(x) \Rightarrow \exists y \exists z((\neg I(y,z)) \wedge D(y,x) \wedge D(z,x) \wedge \forall w(D(w,x) \Rightarrow (I(w,y) \vee I(w,z)))))$
- هر کس دقیقا رانندگی یک خودرو (اتومبیل یا کامیون) را انجام می‌دهد.
$\forall x(H(x) \Rightarrow \exists y(D(x,y) \wedge (C(y) \vee T(y)) \wedge \forall z((D(x,z) \wedge (C(z) \vee T(z))) \Rightarrow I(y,z))))$

۱۳ــ ابتدا فرض کنید $a = \sqrt{۲}$ و $b = \sqrt{۲}$. در این صورت $a^b = \sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ یک عدد اصم است. مجدداً فرض کنید $a = \sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ و $b = \sqrt{۲}$ به راحتی نتیجه می شود که

$$a^b = \left(\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}\right)^{\sqrt{۲}} = \left(\sqrt{۲}\right)^{۲} = ۲$$

پس این قضیه وجودی برقرار است.

۱۴ــ فرض کنید p گزاره «این خیابان به طرف مرکز شهر می‌رود» را نشان دهد و گزاره «اینجا ایستگاه اتوبوس است» را با q نشان دهیم. برای ترکیب‌های حاصل از صحبت‌های سه نفر، جدول درستی این گزاره‌ها چنین است (تنها قسمتی از جدول آورده شده است) :

نفر سوم: $\neg p \wedge \neg q$	نفر دوم: $\neg p \wedge q$	نفر اول: $p \wedge \neg q$	q	p
ن	ن	ن	د	د
ن	ن	د	ن	د
ن	د	ن	د	ن
د	ن	ن	ن	ن

چون هر سه نفر گفتند که یک نفر دروغگو و دو نفرشان راستگو است پس هر سه دروغگو هستند (چرا). بنابراین، تنها سطر اول درست بوده و نتیجه زیر به دست می‌آید. «اینجا ایستگاه اتوبوس است و خیابان به طرف مرکز شهر می‌رود.»

۱۵ــ فرض کنید «تعمیرگاه در سمت شمال جاده است» را با n و «این جاده به سمت جنوب به تعمیرگاه می‌رسد» را با s نشان دهیم. جدول ارزش متناظر این مساله چنین است:

نفر دوم: $n \Rightarrow s$	نفر دوم: $n \wedge s$	نفر اول: $n \vee s$	s	n
د	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	د
د	ن	د	د	ن
د	ن	ن	ن	ن

چون یک نفر نمی‌تواند هم راستگو و هم دروغگو باشد(سطر ۳ و ۴ را در ردیف‌های ۴ و ۵ نگاه کنید)، پس ردیف سوم و چهارم مناسب با سناریوی مساله نیستند. از باقیمانده ستون سوم نتیجه می‌شود که نفر اول راستگو بوده و بنابراین، نفر دوم دروغگو است. پس از سطر اول نیز صرف نظر کرده و از سطر دوم جدول نتیجه می‌گیریم که تعمیرگاه در سمت شمال جاده است. بنابراین راننده تصیم درستی گرفته است.

تمرین ۱ــ۲

۳ــ(و) برای $n = ۱$ داریم : $۱ + x \geq ۱ + x$ (تساوی برقرار است). فرض کنیم گزاره برای $n = ۱, ۲, \dots, k$ برقرار است.، یعنی $(۱ + x)^k \geq ۱ + kx$. ثابت می‌کنیم برای $k + ۱$ نیز برقرار است. بنا به فرض استقرا داریم:

$$(۱ + x)^{k+۱} = (۱ + x)(۱ + x)^k \geq (۱ + x)(۱ + kx).$$

پس

$$(۱ + x)^{k+۱} \geq ۱ + (k + ۱)x + kx^۲,$$

که به وضوح از $۱ + (k + ۱)x$ بزرگ‌تر است و به این ترتیب حکم ثابت می‌شود.

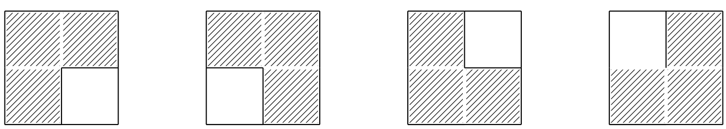
۳ـ(یب) به وضوح $۲^۴ < ۴!$. فرض کنیم حکم برای $n = k$ برقرار است. یعنی برای هر $k \geq ۴$ داریم $۲^k < k!$. در این صورت

$$(k + ۱)! = k!(k + ۱) > (k + ۱)۲^k.$$

حکم با $k + ۱ > ۲$ نتیجه می‌شود.

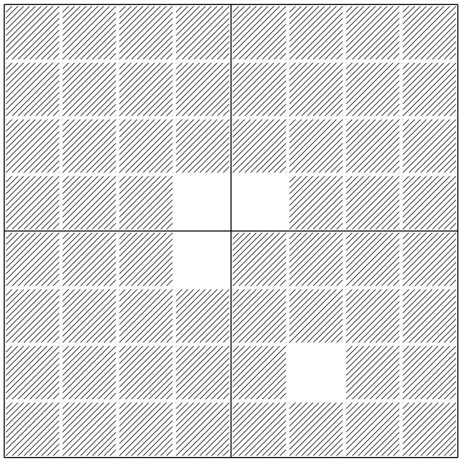
۴ـ برای حل از استقرای قوی استفاده می‌کنیم. واضح است که حکم برای عدد ۲ برقرار است. فرض کنیم حکم برای هر $۱ < i \leq k$ برقرار است، یعنی هر عدد $۱ < i \leq k$ یا اول است و یا عامل اول دارد. اگر $k + ۱$ اول باشد، آنگاه حکم برقرار است. فرض کنیم $k + ۱$ اول نیست. پس دو عدد a و b وجود دارند به طوری که $ab = k + ۱$. واضح است که $a \leq k$ و $b \leq k$. بنا به فرض استقرا، a و b عامل‌های اول دارند. بنابراین، $k + ۱$ به صورت حاصل‌ضرب عامل‌های اول a و b نوشته می‌شود. به این ترتیب حکم ثابت می‌شود.

۵ـ اثبات را با استقرا روی n انجام می‌دهیم. برای $n = ۱$ چهار حالت زیر وجود دارد و حکم برقرار است.



حال فرض کنیم گزاره برای یک شبکه به ابعاد $۲^k \times ۲^k$ برقرار است. ثابت می‌کنیم حکم برای یک شبکه به ابعاد $۲^{k+۱} \times ۲^{k+۱}$ نیز برقرار است. این شبکه را به چهار زیرشبکه با ابعاد $۲^k \times ۲^k$ تقسیم می‌کنیم. بنا به فرض استقرا، هرکدام از این چهار زیرشبکه را می‌توان با موزاییک‌های به صورت L پوشش داد و در هر کدام تنها یک خانه پوشش داده نمی‌شود. با دوران دادن زیرشبکه‌ها، آنها را چنان مرتب می‌کنیم که مربع خالی سه زیرشبکه در وسط قرار گیرند (شکل بعدی را نگاه کنید). در این صورت تنها یک خانه خالی پوشش داده نمی‌شود و

به این ترتیب حکم ثابت می‌شود.



۸ــ (ی) برای $n = 1$ داریم :

$$2 = 2! \geq (2!)^1 = 2$$

حال فرض کنیم حکم برای $n = k$ برقرار است. یعنی

$$2!.4!.6!\cdots(2k)! \geq ((k+1)!)^k.$$

طرفین این رابطه را در $(2(k+1))!$ ضرب می‌کنیم. داریم:

$$2!.4!.6!\cdots(2k)!(2k+2)! \geq ((k+1)!)^k(2k+2)!.$$

اگر نشان دهیم سمت راست این رابطه بزرگ‌تر از $((k+2)!)^{k+1}$ است، حکم ثابت می‌شود. توجه کنید که $(2k+2)!$ در سمت راست این نابرابری را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(2k+2)! = (2k+2)(2k+1)(2k)\cdots(k+3)(k+2)!.$$

در سمت راست این تساوی، k جمله وجود دارد که هر کدام بزرگ‌تر از $k+2$ بوده و به $(k+2)!$ ضرب شده‌اند. بنابراین،

$$\begin{aligned}((k+1)!)^k(2k+2)! &> ((k+1)!)^k(k+2)^k(k+2)!\\ &= ((k+2)!)^k(k+2)! = ((k+2)!)^{k+1}.\end{aligned}$$

۱۱ــ (د) گام استقرا: اگر حکم برای $n \geq 6$ برقرار باشد آنگاه

$$\frac{(n+1)^2}{2^n} \leq 1$$

برای $n+1$ داریم:

$$\frac{(n+2)^2}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2\frac{(n+1)^2}{2^n} \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^2.$$

چون $\sqrt{۲} \leq ۱/۴ \leq \left(۱ + \frac{۱}{n+۱}\right)$ حکم نتیجه می شود.

۱۱ـ(ه) برای $n = ۱$، کافی است نشان دهیم:

$$۱ \leq ۲\sqrt{۱} = ۲.$$

فرض کنیم حکم برای $n = k$ برقرار است یعنی

$$۱ + \frac{۱}{\sqrt{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۳}} + \cdots + \frac{۱}{\sqrt{k}} \leq ۲\sqrt{k}$$

برای نشان دادن این که حکم برای $n = k + ۱$ نیز برقرار است، به طرفین رابطه فوق مقدار $\frac{۱}{\sqrt{k+۱}}$ را اضافه می‌کنیم. داریم:

$$۱ + \frac{۱}{\sqrt{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۳}} + \cdots + \frac{۱}{\sqrt{k}} + \frac{۱}{\sqrt{k+۱}} \leq ۲\sqrt{k} + \frac{۱}{\sqrt{k+۱}}.$$

اگر بتوانیم نشان دهیم:

$$\sqrt{k} + \frac{۱}{\sqrt{k+۱}} \leq ۲\sqrt{k+۱},$$

آنگاه حکم نیز ثابت می‌شود. طرفین این رابطه را به $\sqrt{k+۱}$ ضرب کرده و دو طرف را به توان دو می‌رسانیم. با مرتب کردن طرفین رابطه به دست آمده داریم:

$$۴\sqrt{k(k+۱)} \leq ۴k + ۳.$$

با به توان دو رساندن مجدد این نامساوی به رابطه

$$۱۶k^۲ + ۱۶k \leq ۱۶k^۲ + ۲۴k + ۹,$$

می‌رسیم که به وضوح برقرار است.

۱۳ـ فرض کنید $f(n)$ نشان دهنده تعداد ناحیه‌ها در صفحه است که با قاعده مساله تولید می‌شود. واضح است که $f(۱) = ۲$، $f(۲) = ۴$ و $f(۳) = ۷$. در محاسبه $f(۳)$ دقت کنید که خط سوم وقتی دو خط قبلی را قطع می‌کند به سه قسمت تفکیک می‌شود. و هرکدام از این قسمت‌ها، ناحیه متناظر را به دو قسمت تفکیک می‌کند. بنابراین داریم: $f(۳) = f(۲) + ۳$. این رابطه در حالت کلی برقرار است و داریم:

$$f(k+۱) = f(k) + (k+۱). \tag{۱.۹}$$

ابتدا نشان دهید که

$$f(n) = \frac{n(n+۱)}{۲} + ۱$$

در رابطه فوق صدق می‌کند. حال از استقرا استفاده کرده و نشان می‌دهیم $f(n)$ واقعا آن چیزی است که می‌خواهیم. برای $n = ۱$ رابطه به وضوح برقرار است. اگر حکم برای k برقرار باشد، از رابطه (۱.۹) استفاده کرده و درستی حکم را برای $k + ۱$ نتیجه بگیرید.

۱۹ـ با استقرا روی n ثابت می‌کنیم. اگر $n = ۴$ باشد آن را با دو اسکناس دو هزار تومانی پرداخت می‌کنیم. فرض کنید گزاره برای n هزار تومان برقرار است. نشان می‌دهیم حکم برای $n + ۱$ هزار تومان نیز برقرار است. دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول اگر در پرداخت n هزارتومان از اسکناس پنچ هزار تومانی استفاده شده باشد آن را با سه اسکناس دو هزارتومانی جایگزین می‌کنیم.

حالت دوم اگر در پرداخت n هزار تومان تنها از اسکناس‌های دو هزار تومانی استفاده شود، چون $n \geq ۴$، پس حداقل دو اسکناس دو هزار تومانی وجود دارد. آنها را با یک اسکناس پنج هزار تومانی عوض می‌کنیم.

۲۵ـ حکم برای $n = ۱$ برقرار است. اگر حکم برای n برقرار باشد برای $n + ۱$ داریم:

$$x^{n+۱} - y^{n+۱} = x^n x - y^n x + y^n x - y^n y = (x^n - y^n)x + y^n(x - y).$$

به این ترتیب حکم برای هر n نتیجه می شود.

۲۷ـ برای $n = ۱$ داریم:

$$\sqrt{۲} = ۲\cos\frac{\pi}{۲^۲} = ۲\cos\frac{\pi}{۴} = ۲\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲}.$$

فرض کنید حکم برای k برقرار است:

$$\sqrt{۲ + \sqrt{۲ + \sqrt{۲ + \cdots + \sqrt{۲}}}} = ۲\cos\frac{\pi}{۲^{k+۱}}.$$

به طرفین این رابطه عدد ۲ را اضافه کرده و ریشه دوم آن را در نظر می‌گیریم. سمت راست عبارت است از:

$$\sqrt{۲ + ۲\cos\frac{\pi}{۲^{k+۱}}},$$

و سمت چپ آن $k + ۱$ ریشه دوم تودرتو دارد. کافی است نشان دهیم

$$\sqrt{۲ + ۲\cos\frac{\pi}{۲^{k+۱}}} = ۲\cos\frac{\pi}{۲^{k+۲}}.$$

می‌دانیم

$$\cos^۲\theta = \frac{۱ + \cos ۲\theta}{۲}.$$

حکم با قرار دادن $\frac{\pi}{۲^{k+۲}}$ به جای θ نتیجه می‌شود.

۲۸ـ ابتدا نشان می‌دهیم حکم برای $n = ۰$ و $n = ۱$ برقرار است. برای $n = ۰$ داریم:

$$۱ = P_۰(۲\cos\theta) = \frac{\sin\theta}{\sin\theta} = ۱$$

همچنین برای $n = ۱$ داریم:

$$۲\cos\theta = P_۱(۲\cos\theta) = \frac{\sin ۲\theta}{\sin\theta} = \frac{۲\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta} = ۲\cos\theta.$$

حال فرض کنید حکم برای $n = k$ و $n = k - ۱$ برقرار است.

$$P_k(۲\cos\theta) = \frac{\sin(k+۱)\theta}{\sin\theta}, \quad P_{k-۱}(۲\cos\theta) = \frac{\sin k\theta}{\sin\theta}.$$

بنا بر تعریف $P_{k+۱}(x)$ داریم:

$$\begin{aligned} P_{k+۱}(۲\cos\theta) &= ۲\cos\theta P_k(۲\cos\theta) - P_{k-۱}(۲\cos\theta) \\ &= ۲\cos\theta\frac{\sin(k+۱)\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin k\theta}{\sin\theta}. \end{aligned}$$

با استفاده از رابطه $k\theta = (k+۱)\theta - \theta$ در سمت راست این رابطه داریم:

$$\begin{aligned} P_{k+۱}(۲\cos\theta) &= \frac{۲\cos\theta\sin(k+۱)\theta - \sin((k+۱)\theta - \theta)}{\sin\theta} \\ &= \frac{۲\cos\theta\sin(k+۱)\theta - \cos\theta\sin(k+۱)\theta + \cos(k+۱)\theta\sin\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{\cos\theta\sin(k+۱)\theta + \cos(k+۱)\theta\sin\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{\sin(k+۲)\theta}{\sin\theta}. \end{aligned}$$

به این ترتیب حکم ثابت می‌شود.

۲۹ـ برای ساده کردن نماد، فرض کنید

$$S_k(\theta) = \sin\theta + \sin ۲\theta + \cdots + \sin k\theta.$$

برای $n = ۱$ (پایه استقرا) داریم:

$$\sin\theta = S_۱(\theta) = \frac{\sin(۲\theta/۲)\sin(\theta/۲)}{\sin(\theta/۲)} = \sin\theta.$$

فرض کنید حکم برای $n = k$ برقرار است یعنی:

$$S_k(\theta) = \frac{\sin\dfrac{(k+۱)\theta}{۲}\sin\dfrac{k\theta}{۲}}{\sin\dfrac{\theta}{۲}}.$$

چون $S_{k+۱}(\theta) = S_k(\theta) + \sin(k+۱)\theta$، داریم:

$$S_{k+۱}(\theta) = \frac{\sin\dfrac{(k+۱)\theta}{۲}\sin\dfrac{k\theta}{۲} + \sin(k+۱)\theta\sin\dfrac{\theta}{۲}}{\sin\dfrac{\theta}{۲}}.$$

نتیجه نهایی با استفاده از رابطه

$$\sin(k+۱)\theta = \sin ۲\,\frac{(k+۱)\theta}{۲} = ۲\sin\frac{(k+۱)\theta}{۲}\cos\frac{(k+۱)\theta}{۲},$$

به دست می‌آید.

فصل دوم

تمرین ۱.۲

۳ـ حکم برای $n = ۱$ برقرار است (چرا). فرض کنید S یک مجموعه k عضوی بوده و $۲^k - ۱$ زیرمجموعه ناتهی دارد. مجموعه $S^+ = S \cup \{b\}$ را می‌سازیم که در آن $b \notin S$. مجموعه $\{b\}$ یک زیرمجموعه S^+ بوده و برای هر زیرمجموعه A از S، دو زیرمجموعه ناتهی A و $A \cup \{b\}$ برای S^+ وجود دارد. پس

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}(S^+)| &= ۲|\mathcal{P}(S)| + ۱ \\ &= ۲(۲^k - ۱) + ۱ = ۲^{k+۱} - ۱. \end{aligned}$$

به این ترتیب، حکم ثابت می‌شود.

فصل سوم

تمرین ۱.۳

۵ـ برای رقم سمت چپ ۹ انتخاب (عدد باید هفت رقمی باشد) و برای رقم سمت راست ۲ انتخاب (عدد باید بر پنج قابل قسمت باشد) وجود دارد. برای پنج رقم دیگر محدودیتی وجود ندارد و هر کدام به ۱۰ حالت انتخاب می‌شوند. بنا بر تعمیم اصل ضرب، جواب مساله $= ۱۰^۵ \times ۲ \times ۹$ ۱۸۰۰۰۰۰ است.

۸ـ تعداد کلمات یک حرفی ۲۶، دو حرفی $۲۶^۲$ و ... و پنج حرفی $۲۶^۵$ است. بنا بر تعمیم اصل جمع، جواب مساله

$$۲۶ + ۲۶^۲ + ۲۶^۳ + ۲۶^۴ + ۲۶^۵$$

است.

۱۰ـ برای قرار دادن یکی از حروف بی‌صدا (هر کدام باشد)، یکی از ۲۶ محل را می‌توان انتخاب کرد. برای مکان دومین حرف بی‌صدا، یکی از ۲۵ مکان باقیمانده را می‌توان انتخاب کرد. به همین ترتیب محل تمامی حروف بی‌صدا را مشخص می‌کنیم. بعد از مشخص شدن مکان حروف بی‌صدا، حروف صدادار تنها به یک روش قرار می‌گیرند (در ترتیب الفبایی). بنا بر اصل ضرب، جواب مساله عبارت است از:

$$۲۶ \times ۲۵ \times \cdots \times ۶ = \frac{۲۶!}{۵!}.$$

۱۱ـ ابتدا عدد ۶۰۰ را به عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم. داریم:

$$۶۰۰ = ۲^۳ \times ۳^۱ \times ۵^۲.$$

عدد m مقسوم علیه ۶۰۰ است هرگاه $m = ۲^a \times ۳^b \times ۵^c$ که در آن $a, b, c \in \mathbb{Z}$ و $۰ \leq a \leq ۳$، $۰ \leq b \leq ۱$ و $۰ \leq c \leq ۲$. بنابراین، هر مقسوم علیه با سه‌تایی (a, b, c) با شرایط فوق‌الذکر متناظر است. بنا بر اصل ضرب، تعداد مقسوم علیه‌ها عبارت است از $۴ \times ۲ \times ۳ = ۲۴$.

۱۲ــ فرض کنید یکی از افراد روی یکی از صندلی‌ها نشسته است. برای انتخاب نفر سمت راست او $n - ۱$ انتخاب وجود دارد. برای سمت راست نفر دوم $n - ۲$ انتخاب و اگر به همین روال ادامه دهیم، از اصل ضرب، تعداد کل انتخاب‌ها $(n - ۱)!$ است.

۱۳ــ (الف) بنا بر تمرین قبلی پاسخ $۷!$ است.

۱۳ــ (ب) پنج پسر و دو دختر بجز $G_۱$ می‌توانند به $(۷ - ۱)!$ روش مختلف دور میز قرار گیرند. اگر یکی از این ترتیب‌ها را داشته باشیم، $G_۱$ فقط $۷ - ۲ = ۵$ روش برای انتخاب محل نشستن خود دارد (هر جایی به غیر از سمت راست و چپ $B_۱$). بنا بر اصل ضرب داریم: $۶! \times ۵ = ۳۶۰۰$.

۱۳ــ (ج) ابتدا فرض کنیم پنج پسر دور میز نشسته‌اند. این کار به $(۵ - ۱)! = ۴!$ حالت امکان‌پذیر است. اگر چنین ترتیبی داده شده باشد، $G_۱$ پنج انتخاب برای نشستن، $G_۲$ چهار انتخاب و $G_۳$ تنها سه انتخاب برای تعیین محل نشستن خودشان دارند. بنا بر اصل ضرب، تعداد روش‌های مطلوب عبارتند از:

$$۴! \times ۵ \times ۴ \times ۳ = ۱۴۴۰.$$

۱۸ــ برای حل این مساله سه روش مختلف ارائه می‌کنیم.

روش اول: عضوی دلخواه مانند x را در نظر بگیرید. تعداد حالت‌های مختلف برای انتخاب دومین عضو که آن را y می‌نامیم؛ $۲n - ۱$ است. توجه داشته باشید که $\{x, y\}$ یک زیرمجموعه از A است. عضو دلخواه دیگری مانند z را انتخاب کنید. این عضو را به عنوان یک عضو از زیرمجموعه محسوب می‌کنیم و عضوی دیگر از A در نظر می‌گیریم. برای انتخاب دومین عضو این زیرمجموعه، $۲n - ۳$ انتخاب مختلف وجود دارد. اگر انتخاب‌ها را به همین روش ادامه دهیم و از تعمیم اصل ضرب استفاده کنیم؛ تعداد مطلوب روش‌های انتخاب عبارت است از:

$$(۲n - ۱) \times (۲n - ۳) \times \cdots \times ۵ \times ۳ \times ۱.$$

روش دوم: ابتدا یک زیر مجموعه دوعضوی انتخاب کرده و در مکان اول قرار می‌دهیم. این کار به $\binom{۲n}{۲}$ حالت امکان پذیر است. سپس یک زیرمجموعه دوعضوی دیگر از باقیمانده اعضای A می‌سازیم و در مکان دوم قرار می‌دهیم. این کار به تعداد $\binom{۲n - ۲}{۲}$ حالت امکان‌پذیر است. با ادامه این کار و استفاده از اصل ضرب، تعداد روش‌های مختلف مرتب کردن n زیرمجموعه دو عضوی از اعضای A عبارت است از:

$$\binom{۲n}{۲}\binom{۲n - ۲}{۲} \cdots \binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲}.$$

چون ترتیب قرارگرفتن زیرمجموعه‌ها مهم نیست و این زیرمجموعه‌ها به $n!$ حالت مختلف می‌توانند جای خود را با هم عوض کنند، جواب مساله برابر است با:

$$\frac{\binom{۲n}{۲}\binom{۲n-۲}{۲}\cdots\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲}}{n!}.$$

روش سوم: ابتدا $۲n$ عضو A را در $۲n$ مکان مرتب می‌کنیم. این کار به $(۲n)!$ حالت مختلف امکان‌پذیر است. چون ترتیب قرار گرفتن هر دو عضو در هر زیرمجموعه مهم نیست و همچنین ترتیب قرار گرفتن زیرمجموعه‌ها نیز اهمیتی ندارد؛ پس تعداد حالت‌های مساعد عبارت است از:

$$\frac{(۲n)!}{۲^n n!} = (۲n-۱)\times(۲n-۳)\times\cdots\times ۵\times ۳\times ۱.$$

تمرین ۲.۳

۸ـ از بسط $(۱+x)^n$ مشتق می‌گیریم. داریم:

$$n(۱-x)^{n-۱} = \binom{n}{۱} + ۲\binom{n}{۲}x + \cdots + n\binom{n}{n}x^{n-۱}.$$

با ضرب طرفین در x رابطه زیر به دست می‌آید:

$$nx(۱-x)^{n-۱} = \binom{n}{۱}x + ۲\binom{n}{۲}x^۲ + \cdots + n\binom{n}{n}x^n.$$

در این رابطه، به جای x، $۱/x$ را قرار می‌دهیم:

$$n\frac{۱}{x}(۱-\frac{۱}{x})^{n-۱} = \frac{\binom{n}{۱}}{x} + \frac{۲\binom{n}{۲}}{x^۲} + \cdots + \frac{n\binom{n}{n}}{x^n}.$$

این مجموع را به رابطه زیر ضرب می‌کنیم:

$$(۱-x)^n = \binom{n}{۰} + \binom{n}{۱}x + \binom{n}{۲}x^۲ + \cdots + \binom{n}{n}x^n.$$

در این صورت، جمله ثابت در این حاصل ضرب (ضریب $x^۰$) سمت راست رابطه مورد نظر است و بنابراین با جمله ثابت در بسط

$$\frac{n}{x}(۱+x)^n(۱+\frac{۱}{x})^{n-۱} = \frac{n}{x^n}(۱+x)^{۲n-۱}$$

برابر است . این مقدار همان ضریب x^n در $n(۱-x)^{۲n-۱}$ است. به این ترتیب حکم نتیجه می‌شود.

۱۲ــ هر زیرمجموعه k عضوی از یک مجموعه n عضوی معادل با قرار دادن k توپ یکسان در n جعبه است به طوری که در هر جعبه حداکثر یک توپ قرار گیرد. تمامی زیرمجموعه‌های k عضوی از یک مجموعه n عضوی را می‌سازیم. برای این کار تعداد $k\binom{n}{k}$ توپ نیاز داریم. تمامی n جعبه با هم یکسان بوده و خاصیت تقارنی دارند؛ بنابراین در هر جعبه تعداد $\frac{۱}{n}(k\binom{n}{k})$ توپ قرار می‌گیرد. هر روش قرار دادن k توپ در n جعبه که توپی درون جعبه مشخصی قرار گیرد، با قرار دادن $k-۱$ توپ باقیمانده در $n-۱$ جعبه باقیمانده، متناظر است. به این ترتیب قسمت اول رابطه ثابت می‌شود. قسمت دوم را به روش مشابه ثابت کنید.

۱۳ــ برای اثبات تساوی اول، کافی است که از بسط دوجمله‌ای $(۱+x)^n$ مشتق گرفته و ضریب x^k را در طرفین رابطه مقایسه کنیم. تساوی دوم را به روش مشابه ثابت کنید.

۱۵ــ مجموعه n عضوی را با $N=\{x_۱,x_۲,\dots,x_n\}$ نشان می‌دهیم. مجموعه تمامی زیرمجموعه‌های m عضوی N را با $\mathcal{B}_m(N)$ نشان می‌دهیم. مجموعه $\mathcal{L}_i$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$\mathcal{L}_i=\{B|B\in\mathcal{B}_m(N);x_۱,x_۲,\dots,x_{i-۱}\notin\mathcal{B}_m(N),x_i\in\mathcal{B}_m(N)\}.$$

واضح ست که هر عضو $B\in\mathcal{B}_m(N)$ تنها به یک $\mathcal{L}_i$ تعلق دارد. پس،

$$\binom{n}{m}=|\mathcal{B}_m(N)|=|\mathcal{L}_۱|+|\mathcal{L}_۲|+\cdots$$

هر $B\in\mathcal{L}_i$ دقیقاً با یک

$$C=B-\{x_i\}\in\mathcal{B}_{m-۱}(N-\{x_۱,x_۲,\dots,x_i\}),$$

متناظر است. پس

$$|\mathcal{L}_i|=|\mathcal{B}_{m-۱}(N-\{x_۱,x_۲,\dots,x_i\})|=\binom{n-i}{m-۱}.$$

با تعویض جای n با $n+۱$ و m با $m+۱$ حکم نتیجه می‌شود.

۲۲ــ (الف) از بسط دو جمله‌ای $(۱+x)^n$ مشتق گرفته و قرار دهید $x=۱$. در این صورت حاصل مجموع $n۲^{n-۱}$ است.

۲۲ــ (ج) از بسط دو جمله‌ای $(۱+x)^n$ در بازه $[۰,۱]$ انتگرال بگیرید. حاصل به صورت $\dfrac{n۲^{n+۱}-۱}{n+۱}$ است.

تمرین ۳.۳

۲۰ــ فرض کنید $S=\{۱,۲,\dots,۴۸\}$. تنها سه عدد اول ۲، ۳ و ۵ وجود دارند که از $\sqrt{۴۸}$ بیشتر نیستند. پس خاصیت $c_۱$، $c_۲$ و $c_۳$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

خاصیت $c_۱$: اعدادی در این خاصیت صدق می‌کنند که بر ۲ بخش‌پذیر هستند.

خاصیت $c_۲$: اعدادی در این خاصیت صدق می‌کنند که بر ۳ بخش‌پذیر هستند.

خاصیت $c_۳$: اعدادی در این خاصیت صدق می‌کنند که بر ۵ بخش‌پذیر هستند.

تعداد اعضای مجموعه S که در یک خاصیت صدق می‌کنند برابر است با

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(c_۱)+\mathcal{N}(c_۲)+\mathcal{N}(c_۳) &= \lfloor\frac{۴۸}{۲}\rfloor+\lfloor\frac{۴۸}{۳}\rfloor+\lfloor\frac{۴۸}{۵}\rfloor\\ &= ۲۴+۱۶+۹=۴۹.\end{aligned}$$

تعداد اعضای S که در دو خاصیت صدق می‌کنند برابر است با

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(c_۱,c_۲)+\mathcal{N}(c_۱,c_۳)+\mathcal{N}(c_۲,c_۳) &= \lfloor\frac{۴۸}{۶}\rfloor+\lfloor\frac{۴۸}{۱۰}\rfloor+\lfloor\frac{۴۸}{۱۵}\rfloor\\ &= ۸+۴+۳=۱۵.\end{aligned}$$

همچنین تنها یک عدد وجود دارد که بر هر سه عدد اول ۲، ۳ و ۵ بخش‌پذیر است. بنا بر اصل شمول و طرد، تعداد اعدادی از S که بر هیچ یک از این سه عدد قابل قسمت نیست عبارت است از:

$$۴۸-۴۹+۱۵-۱=۱۳.$$

بنابراین، تعداد اعداد اول بین ۱ و ۴۸ (و داخل) برابر است با $۱۵ = ۱ - ۳ + ۱۳$. زیرا اعداد ۲، ۳ و ۵ باید جز اعداد اول شمارش شوند و عدد ۱ نیز اول نیست و نباید شمارش شود.

تمرین ۵.۳

۲ــ فرض کنید هیچ زیردنباله $n+۱$ عضوی صعودی وجود ندارد. b_i را طول طولانی‌ترین زیردنباله صعودی در نظر می‌گیریم که اولین جمله آن a_i است. بنا بر اصل لانه کبوتر، حداقل $n+۱$ جمله در دنباله b_i وجود دارد که با هم برابرند. چون $i<j$ و $b_i=b_j$ که از آن $a_i>a_j$ نتیجه می‌شود. پس یک دنباله نزولی از $n+۱$ جمله داریم.

۸ــ هر مربع به یکی از دو رنگ، رنگ‌آمیزی می‌شود، پس هر ستون از سه مربع، یکی از $۸ = ۲^۳$ الگوی رنگ را دارد. تعداد ستون‌ها، هفت بوده و بنابراصل لانه کبوتر، دو ستون از نه ستون، الگوی رنگ یکسانی دارند. در هر یک از این ستون‌ها، مجدداً بنا بر اصل لانه کبوتر، حداقل دو مربع از یک رنگ وجود دارد. این چهار نقطه نتیجه مطلوب را به وجود می‌آورند. (ثابت کنید مساله برای ۲۱ مربع در یک آرایه ۳×۷ نیز برقرار است؟)

۹ــ سه رنگ را با R، B و Y نشان دهید. ۱۹ ستون را به عنوان کبوتر در نظر بگیرید و $(X,\{a,b\})$ را به عنوان لانه کبوتر فرض کنید که در آن X یکی از سه رنگ بوده و $۱\le a<b\le ۴$. توجه کنید که در هر ستون چهار نقطه وجود دارد. بنا به اصل لانه کبوتر $۲ = \lceil\frac{۴}{۳}\rceil$ نقطه از این چهار نقطه همرنگ هستند. فرض کنید نقاط a و b از رنگ X هستند. در این صورت آن را در لانه $(X,\{a,b\})$ قرار می‌دهیم . تعداد لانه‌های کبوتر $۱۸ = \binom{۴}{۲}\times ۳$ است در حالی که تعداد کبوترها ۱۹ است. از اصل لانه کبوتر حکم نتیجه می‌شود.

۱۱ـ ۵۰ زوج از اعداد به صورت $(۱,۲)$، $(۳,۴)$، ... و $(۹۹,۱۰۰)$ را در نظر بگیرید. چون ۵۱ عدد انتخاب شده است، بنا بر اصل لانه کبوتر، زوجی مانند $(k, k+۱)$ در بین آنها وجود دارد. اگر عددی مانند p هر دو عدد k و $k+۱$ را عاد کند آنگاه $(k+۱)-k=۱$ را نیز عاد خواهد کرد، که این یک تناقض است.

۱۲ـ ۵۰ عدد فرد $۱,۳,۵,\ldots,۹۹$ را در نظر بگیرید. برای هر کدام از آنها جعبه‌ای ایجاد کنید و در داخل آن این عدد و تمامی مضارب آن در توان‌های ۲ را قرار دهید. در این صورت در داخل اولین جعبه اعداد $\{۱,۲,۴,۸,۱۶,\ldots\}$ قرار دارند و در جعبه بعدی اعداد $\{۳,۶,۱۲,۲۴,\ldots\}$ و به همین ترتیب سایر جعبه‌ها نیز اعدادی را شامل می‌شوند. با توجه به اصل لانه کبوتر، وقتی ۵۱ عدد از بین این ۵۰ جعبه انتخاب می‌کنیم، از یک جعبه بیش از یک عدد انتخاب می‌شود. این دو عدد به صورت $k۲^m$ و $k۲^n$ هستند. پس یکی بر دیگری قابل قسمت است.

۱۳ـ عبارت داخل این نامساوی رابطه $\tan(x-y)$ را تداعی می‌کند. بنابراین به صورت زیر عمل می‌کنیم. بازه $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ را به هشت قسمت به صورت زیر تقسیم می‌کنیم.

$$(-\frac{\pi}{۲},-\frac{۳\pi}{۸}],(-\frac{۳\pi}{۸},-\frac{\pi}{۴}],\ldots,(\frac{\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۸}],(\frac{۳\pi}{۸},\frac{\pi}{۲}].$$

فرض کنید ۹ عدد داده شده $a_۱,a_۲,\ldots,a_۹$ هستند و $x_i=\arctan a_i$. بنا بر اصل لانه کبوتر، دو مقدار x_i و x_j با شرط $x_i<x_j$ وجود دارند که در یکی از این زیربازه‌ها قرار می‌گیرند. بنابراین $۰<x_j-x_i<\frac{\pi}{۸}$. با اِعمال تابع $\tan$ روی این نامساوی حکم نتیجه می‌شود.

۱۴ـ هر مجموعه ۱۱ عضوی $۲^{۱۱}-۲=۲۰۴۶$ زیرمجموعه ناتهی با کمتر از ۱۱ عضو دارد و حداکثر مجموع اعداد این زیرمجموعه‌ها

$$۹۱+۹۲+\cdots+۹۹+۱۰۰=۹۵۵,$$

است. بنا بر اصل لانه کبوتر، حداقل دو زیرمجموعه وجود دارند که مجموع اعضای آنها مساوی است. اگر دو مجموعه عضو مشترک داشته باشند، آنها را حذف کنید تا نتیجه مورد نیاز مساله به دست آید.

۱۵ـ مختصات هر یک از نقاط یا زوج است و یا فرد. بنابر این الگوی مختصات هر یک از این نقطه یکی از $۸=۲^۳$ حالت را دارد. بنا به اصل لانه کبوتر، دو عدد از این ۹ عدد الگوی یکسانی دارند. بنابراین، مختصات وسط این پاره خط اعداد صحیح هستند.

۱۶ـ فرض کنید $d_۱,d_۲,\ldots,d_{۱۶}$، ارقام این عدد ۱۶ رقمی هستند. اگر در بین این ارقام، اعداد ۰، ۱، ۴ و یا ۹ وجود داشته باشند، حکم بدیهی است. پس فرض کنید چنین ارقامی در این عدد ۱۶ رقمی وجود ندارند. پس این ارقام $۲,۳,۵,۶,۷,۸$ هستند. عدد ۶ به صورت حاصل ضرب ۲ در ۳ بوده و عدد ۸ برابر با $۲^۳$ است.

فرض کنید $x_۰=۱$ و $x_i=d_۱d_۲\ldots d_\ell$ برای $i=۱,۲,\ldots,۱۶$ است. در این صورت

$$x_i=۲^{p_i}۳^{q_i}۵^{r_i}۷^{s_i},$$

است که در آن p_i,q_i,r_i,s_i زوج یا فرد هستند. بنابراین تعداد $۲^۴=۱۶$ الگوی متمایز برای این اعداد وجود دارد. تعداد x_i ها، هفده بوده و بنا بر اصل لانه کبوتر، دو عدد از آنها

الگوی یکسانی برای تجزیه دارند. یعنی دو عدد x_j و x_k با $j < k$ الگوی یکسانی دارند. پس $\frac{x_k}{x_j} = d_k \times \cdots \times d_{j+1}$ مربع کامل است.

۱۸ـ مربع را به چهار مربع به طول واحد افراز کنید. پنج نقطه در این چهار مربع انتخاب می‌شوند. بنا بر اصل لانه کبوتر، در یکی از مربع‌ها بیش از یک نقطه قرار می‌گیرند. فاصله بین این دو نقطه نمی‌تواند از $\sqrt{2}$ (قطر مربع واحد) بیشتر باشد.

فصل پنجم

تمرین۲.۵

۱۵ـ (الف) برای $n = 0$ داریم:

$$f_0 f_2 = 0 \times 2 = 0 = f_1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$$

فرض کنیم حکم برای k برقرار باشد. یعنی

$$f_{k-1} f_{k+1} = f_k^2 + (-1)^k. \qquad (2.9)$$

باید نشان دهیم :

$$f_k f_{k+2} = f_{k+1}^2 + (-1)^{k+1}.$$

بنا به تعریف دنباله فیبوناتچی داریم:

$$f_{k+2} = f_{k+1} + f_k$$

با قرار دادن f_{k+2} در حکم استقرا داریم:

$$f_k(f_k + f_{k+1}) = f_{k+1}^2 + (-1)^{k+1},$$

یا

$$f_k^2 + f_k f_{k+1} = f_{k+1}^2 + (-1)^{k+1}.$$

از فرض استقرا (رابطه ۲.۹) داریم:

$$f_{k-1} f_{k+1} - (-1)^k + f_k f_{k+1} = f_{k+1}^2 + (-1)^{k+1}.$$

که برقراری این رابطه قابل تحقیق است. پس حکم ثابت می‌شود.

۱۵ـ(ب) برای $n = 0$ داریم:

$$\sum_{i=0}^{0} f_i^2 = f_0^2 = 0 = 0 \times 1 = f_0 f_1.$$

فرض کنید حکم برای $n = k$ برقرار است. یعنی

$$\sum_{i=0}^{k} f_i^2 = f_k f_{k+1}.$$

به طرفین این رابطه f_{k+1}^2 را اضافه می‌کنیم. داریم:

$$\sum_{i=0}^{k+1} f_i^2 = f_{k+1}^2 + f_k f_{k+1} = f_{k+1}(f_{k+1} + f_k) = f_{k+1} f_{k+2}.$$

به این ترتیب حکم ثابت می‌شود.

تمرین ۴.۵

۵ـ تابع مولد نمایی برای a_r عبارت است از:

$$\begin{aligned} g(x) &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) e^x \\ &= \frac{1}{4} e^x \left(e^{2x} - e^{-2x}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{3x} - e^{-x}\right) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{r=0}^{\infty}\left(3^r - (-1)^r\right)\frac{x^r}{r!}. \end{aligned}$$

پس

$$a_r = \frac{1}{4}\left(3^r - (-1)^r\right).$$

۱۱ـ داریم:

$$\begin{aligned} (x^3 + x^4 + x^5 + \cdots)^6 &= \left[x^3(1 + x + x^2 + \cdots)\right]^6 \\ &= x^{18}(1 + x + x^2 + \cdots)^6 \\ &= x^{18}\left(\frac{1}{1-x}\right)^6 \\ &= x^{18}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+6-1}{r}x^r \\ &= x^{18}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+5}{5}x^r. \end{aligned}$$

ضریب x^k در این عبارت برای $k \geq 18$، همان ضریب x^{k-18} در $\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+5}{5}x^r$ است. در نتیجه

$$a_k = \binom{k-18+5}{5} = \binom{k-13}{5}.$$

۱۲ـ تابع مولد نمایی برای این دنباله عبارت است از:

$$\begin{aligned} g(x) &= (\frac{x}{۱!}+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۳}{۳!}+\cdots)^n \\ &= (e^x-۱)^n \\ &= \sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}(e^x)^{n-k}(-۱)^k \\ &= \sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}\left(\sum_{r=۰}^{\infty}(n-k)^r\frac{x^r}{r!}\right)(-۱)^k \\ &= \sum_{r=۰}^{\infty}\left(\sum_{k=۰}^{n}(-۱)^k\binom{n}{k}(n-k)^r\right)\frac{x^r}{r!}. \end{aligned}$$

پس

$$a_r=\sum_{k=۰}^{n}(-۱)^k\binom{n}{k}(n-k)^r.$$

۱۳ـ تابع مولد نمایی برای دنباله a_r عبارت است از:

$$\begin{aligned} g(x) &= \left(\frac{e^x-e^{-x}}{۲}\right)\left(\frac{e^x+e^{-x}}{۲}\right)^۲ e^x \\ &= \frac{۱}{۸}\left(e^{۲x}-e^{-۲x}\right)\left(e^{۲x}+۱\right) \\ &= \frac{۱}{۸}\left(e^{۴x}-۱+e^{۲x}-e^{-۲x}\right) \\ &= \frac{۱}{۸}\left[-۱+\sum_{r=۰}^{\infty}\left(۴^r+۲^r-(-۲)^r\right)\frac{x^r}{r!}\right]. \end{aligned}$$

پس $a_r=\frac{۱}{۸}\left(۴^r+۲^r-(-۲)^r\right)$.

۱۹ـ تابع مولد متناظر با اعداد کاتالان را به صورت زیر تعریف کنید:

$$c(x)=\sum_{n=۰}^{\infty}C_nx^n$$

این رابطه بازگشتی همراه با شرط اولیه نتیجه می دهد :

$$c(x)=۱+xc(x)^۲.$$

از این رابطه داریم:

$$c(x)=\frac{۱-\sqrt{۱-۴x}}{۲x}=\frac{۲}{۱+\sqrt{۱-۴x}}.$$

از طرف دیگر برای هر y داریم:

$$\sqrt{۱+y}=\sum_{n=۰}^{\infty}\binom{\frac{۱}{۲}}{n}y^n=۱-۲\sum_{n=۱}^{\infty}\binom{۲n-۲}{n-۱}\left(\frac{-۱}{۴}\right)^n\frac{y^n}{n}.$$

با فرض $y=-۴x$ داریم:

$$c(x)=\sum_{n=۰}^{\infty}\binom{۲n}{n}\frac{x^n}{n+۱}.$$

که نتیجه مطلوب به دست می آید.

۲۱ـ ابتدا ثابت کنید برای هر $n\geq ۰$:

$$C_n=\binom{۲n}{n}-\binom{۲n}{n+۱}$$

برای این کار از رابطه زیر استفاده کنید

$$\binom{۲n}{n+۱}=\frac{n}{n+۱}\binom{۲n}{n}.$$

فصل ۱۰

*

کتاب‌نامه

[1] K. Appel and W. Haken, *Every Planar Map is Four Colorable*, Illinois Journal of Mathematics, Vol. **21** (1977), no. 3, pp. 429–567.

[2] D. L. Applegate, R. E. Bixby, V. Chvatal, and W. J. Cook, *The Traveling Salesman Problem: A Computational Study (Princeton Ceries in Applied Mathematics)*, Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 2007.

[3] G. Berman and K. D. Fryer, *Introduction to Combinatorics*, Academic Press, NY, USA, 1972.

[4] A. Burks, D. Warren, and J. Wright. *An Analysis of a Logical Machine Using Parenthesis-Free Notation*, Math. Tables and Other Aids to Computation, **8** (1954), no. 46, pp. 53–57.

[5] A. Cayley, *A Theorem on Trees*, The Quarterly Journal of Mathematics, Vol. 23, 1889, pp. 376–378.

[6] G. Chartrand and O. R. Oellermann, *Applied and Algorithmic Graph Theory*, Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Inc., 1993.

[7] R. Chuaqui, *Axiomatic Set Theory: Impredicative Theories of Classes*, Notas de matemática, North-Holland Pub. Co., 1981.

[8] J. Clark and D. A. Holton, *A first Look at Graph Theory*, World Scientific, Singapore, 1998.

[9] G. A. Dirac, *Some Theorems on Abstract Graphs*, Proceedings of the London Mathematical Society, 3rd Ser. 2 (1952), pp. 69–81.

[10] K. B. Edmund, J. Mareček, A. J. Parkes, and H. Rudová, *On a Clique-Based Integer Programming Formulation of Vertex Colouring with Applications in Course Timetabling*, Tech. Report NOTTCS-TR-2007-10, The University of Nottingham, Nottingham, 2007.

[11] H. B. Enderton, *A Mathematical Introduction to Logic*, Second Ed., Academic Press, January 2001.

[12] G. N. Frederickson, *Approximation Algorithms for Some Postman Problems*, J. ACM Vol. **26** (1979), pp. 538–554.

[13] J. Gallier, *Discrete Mathematics*, Springer, 2011.

[14] E. N. Gilbert, *Gray Codes and Paths on the n-Cube*, Bell System Technical Journal Vol. **37** (1958), pp. 815–826.

[15] R. P. Grimaldi, *Discrete and Combinatorial Mathematics*, fifth ed., Addison-Wesley Publishing Company, NY, 2004.

[16] G. Haggard, J. S. Schlipf, and S. Whitesides, *Discrete Mathematics for Computer Science.*, Thomson Brooks/Cole, 2006.

[17] H. Hotelling, *Some Improvements in Weighing and Other Experimental Techniques*, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. **15** (1944), no. 2, pp. 297–306.

[18] T. R. Jensen and B. Toft, *Graph Coloring Problems*, John Wiley & Sons, 1994.

[19] A. G. Konheim, *Cryptography, a Primer*, Wiley, New York, 1981.

[20] T. Koshy, *Discrete Mathematics with Applications.*, Amsterdam, Elsevier Academic Press, 2004.

[21] J. B. Kruskal, *On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 7, 1956, pp. 48–50.

[22] M. K. Kwan, *Graphic Programming Using Odd or Even Points*, Chinese Mathematics Vol. **1** (1962), pp. 273–277.

[23] R. Lidl, H. Niederreiter, and P.M. Cohn, *Finite fields*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Cambridge University Press, 1997.

[24] R. Lidl and G. Pilz, *Applied Abstract Algebra*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1998.

[25] L. Lovász, J. Pelikán, and K. Vesztergombi, *Discrete Mathematics. Elementary and Beyond.*, New York, Springer, 2003.

[26] M. S. Molloy and B. A. Reed, *Graph Colouring and the Probabilistic Method*, Algorithms and combinatorics, Springer, 2002.

[27] ∅. Ore, *Note on Hamiltonian Circuits*, American Mathematical Monthly, Vol. **67** (1960), pp. 55.

[28] R. C. Prim, *Shortest Connection Networks and Some Generalizations*, Bell System Technical Journal, Vol. **36** (1957), pp. 1389–1401.

[29] E. D. Rather and E. K. Conklin, *Forth Programmer's Handbook*, 3rd ed., BookSurge Publishing, 2007.

[30] K. H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications*, Global Ed. of 7th revised Ed., McGraw Hill Higher Education, 2012.

[31] K. H. Rosen, J. G. Michaels, J. L. Gross, J. W. Grossman, and D. R. Shier, *Handbook of Discrete and Combinatorial Mathematics*, 2 Ed., CRC Press LLC, USA, 2000.

[32] D. Singh, A. M. Ibrahim, T. Yohanna, and J. N. Singh, *Every Planar Map is Four Colorable*, Novi Sad Journal of Mathematics, Vol. **37** (2007), no. 2, pp. 73–92.

[33] N.l J. A. Sloane and M. Harwit, *Masks for Hadamard Transform Optics, and Weighing Designs*, Applied Optics, Vol. **15** (1976), no. 1, pp. 107–114.

[34] L. R. Vermani, *Elements of Algebraic Coding Theory*, Chapman and Hall mathematics series, Chapman & Hall, 1996.

[35] D. C. Wood, *A Technique for Coloring a Graph Applicable to Large-Scale timetabling problems*, Computer Journal Vo. **12** (1969), pp. 317–322.